

Каждый ли узел изотопен PL узлу?

Is every knot isotopic to a PL knot?

每個結都是 PL 結的同位素嗎?

Мелихов С.А.

кандидат физико-математических наук,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Москва, Россия

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Steklov Mathematical Institute of RAS
Moscow, Russia

物理和數學科學候選人,
俄羅斯科學院斯特克洛夫數學研究所
俄羅斯莫斯科
melikhov@mi-ras.ru

В 1974 году Д. Рольфсен поставил следующую проблему: каждый ли узел в S^3 изотопен (=гомотопен посредством вложений) PL узлу или, что то же самое, не узлу? В частности, является ли строп Бинга изотопным PL узлу?

В 2005 году на конференции «Многообразия и их отображения» (Siegen, Germany) я озвучил следующие результаты по этой теме.

Теорема 1. Некоторое двухкомпонентное звено с $lk = 0$ не изотопно ни одному PL-звену.

Теорема 2. Слинг Бинга не изотопен ни одному PL узлу

(а) любой изотопией, продолжающейся до изотопии 2-компонентного звена с $lk = 1$;

(б) через узлы, являющиеся пересечениями вложенных последовательностей полноторий.

Слинг Бинга (R. N. Bing, 1956) представляет собой пересечение вложенной последовательности полноторий $\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z)$, где каждый T_{k+1} представляет собой достаточно малую регулярную окрестность прообраза $M_k \subset T_k$ кривой Мазура $M_k \subset T_k$ при подходящим образом выбранной (геометрически неискаженной) раскрученный нк-складной чехол $T_k \rightarrow T_1$; пока последовательность n_k увеличивается достаточно быстро, $\cap_i T_i$ гомеоморфен S^1 . Последовательность n_k также должна возрасти достаточно быстро, чтобы доказательство теоремы 2 работало, что представляет собой другое (алгебраическое) условие, которое может подразумеваться или не подразумеваться предыдущим (геометрическим) условием.

Доказательство теоремы 1 было написано (и опубликовано) пару лет назад

(см. arXiv:2011.01409). Этот аргумент можно назвать геометрическим; он основан на инвариантах Кокрена β_i , которые расширяются до изотопических инвариантов топологических связей с использованием бесконечных гомологичных поверхностей Зейферта.

Доказательство теоремы 2 было написано в 2023 году и будет обсуждаться в этом докладе (по модулю лемм). Это рассуждение можно назвать алгебраическим. Доказательство (b) и случая (a), когда изотопия вставленного узла K' равна PL, основано на полиноме Конвея. А, точнее, на его уменьшенной версии

$$\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z) ,$$

которая расширена до изотопического инварианта топологических связей (см. arXiv:0312007) с использованием их PL-аппроксимаций и понятия n -квазиизотопии (см. arXiv:0103113).

Доказательство общего случая (a) основано на полиноме Конвея от 2 переменных

$$\nabla_{(K,K')}(z,w,\xi) \in \mathbb{Z}[z,w,\xi]/(\xi^2 + zw\xi - z^2 - w^2 - 4) \subset \mathbb{Q}[z,w][\sqrt{z^2w^2 + 4(z^2 + w^2 + 4)}] ,$$

(см. arXiv:0312007), а точнее на однопараметрическом подсемействе $\beta_1, \beta_2, \dots$ коэффициентов его сокращенной версии

$$\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z) ,$$

которая в случае $lk = 0$ совпадает с последовательностью инвариантов, полученных Cochran. В случае $lk = 1$ эти целые числа β_i демонстрируют гораздо более тонкое геометрическое поведение, чем исходные.

Инварианты Cochran, и именно эта тонкость (о которой мы будем говорить в докладе, если позволит время) до сих пор оставляет проблему Рольфсена открытой.

D. Rolfsen posed the following problem in 1974: Is every knot in S^3 isotopic (=homotopic through embeddings) to a PL knot or, equivalently, to the unknot? In particular, is the Bing sling isotopic to a PL knot?

In 2005, at the conference "Manifolds and their Mappings" (Siegen, Germany) I announced the following results on this subject.

Theorem 1. A certain 2-component link with $lk = 0$ is not isotopic to any PL link.

Theorem 2. The Bing sling is not isotopic to any PL knot

(a) by any isotopy which extends to an isotopy of a 2-component link with $lk =$

1;

(b) through knots that are intersections of nested sequences of solid tori.

The Bing sling (R. H. Bing, 1956) is the intersection of a nested sequence of solid tori $\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z)$, where each T_{k+1} is a sufficiently small regular neighborhood of the preimage $M_k \subset T_k$ of the Mazur curve 002 $M_k \subset T_k$ under a suitably chosen (geometrically undistorted) untwisted n_k -fold cover $T_k \rightarrow T_1$; as long as the sequence n_k increases rapidly enough, $\cap_i T_i$ is homeomorphic to S^1 . The sequence n_k also needs to increase rapidly enough for the proof of Theorem 2 to work, which is a different (algebraic) condition, which may or may not be implied by the previous (geometric) condition.

The proof of Theorem 1 has been written up (and published) a couple of years ago (see arXiv:2011.01409). This argument can be called geometric; it is based on Cochran's derived invariants β_i , which are extended to isotopy invariants of topological links by using infinite homological Seifert surfaces.

The proof of Theorem 2 has been written up in 2023 and will be discussed in this talk (modulo lemmas). This argument can be called algebraic. The proof of (b), and of the case of (a) where the isotopy of the inserted knot K' is PL, is based on the Conway polynomial. Or rather on its reduced version

$$\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z),$$

which is extended to an isotopy invariant of topological links (see arXiv:0312007) by using their PL approximations and the notion of n-quasi-isotopy (see arXiv:0103113).

The proof of the general case of (a) is based on the 2-variable Conway polynomial

$$\nabla_{(K,K')}(z, w, \xi) \in \mathbb{Z}[z, w, \xi]/(\xi^2 + zw\xi - z^2 - w^2 - 4) \subset \mathbb{Q}[z, w][\sqrt{z^2w^2 + 4(z^2 + w^2 + 4)}],$$

(see arXiv:0312007) and more precisely on a 1-parameter subfamily $\beta_1, \beta_2, \dots$ of the coefficients of its reduced version

$$\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z),$$

which in the case $lk = 0$ coincides with the sequence of Cochran's derived invariants. In the case $lk = 1$ these integers β_i exhibit a much more subtle geometric behavior than the original

Cochran's invariants, and it is this subtlety (which will be discussed in the talk if time permits) that still keeps Rolfsen's problem open.

D. Rolfsen 在 1974 年提出了以下問題：S3 同位素 (=透過嵌入的同

位) 中的每個結都是 PL 結，還是等價的，到 unknot? 特別是，Bing 吊帶是 PL 接面的同位素嗎?

2005 年，在「流形及其映射」會議（德國錫根）上，我宣布了關於該主題的以下結果。

定理 1. $lk = 0$ 的某個 2 分量連結不是任何 PL 連結的同位素。

定理 2. Bing 吊索不是任何 PL 結的同位素

(a) 由延伸至 $lk = 1$ 的二元連結的同位素的任何同位素；

(b) 透過實體環面嵌套序列的交叉點。

Bing sling (R. H. Bing, 1956) 是實體圓環 $\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z)$ 的嵌套序列的交集，其中每個 I_{k+1} 是在適當選擇的（幾何不扭曲）下 Mazur 曲線 $M_k \subset T_k$ 的原像 $M_k \subset T_k$ 的足夠小的規則鄰域。）未扭曲的 n_k 折疊蓋 $T_k \rightarrow T_1$ ；只要序列 n_k 增加得夠快， $\cap_i T_i$ 就同胚於 S_1 。序列 n_k 還需要足夠快地增加以使定理 2 的證明起作用，這是一個不同的（代數）條件，它可能由先前的（幾何）條件暗示，也可能不暗示。

定理 1 的證明已於幾年前撰寫（並發表）（參見 arXiv:2011.01409）。這個論證可以稱為幾何論證；它基於 Cochran 導出的不變量 β_i ，透過使用無限同調 Seifert 曲面將其擴展到拓撲鏈結的同位素不變量。

定理 2 的證明已於 2023 年寫出，並將在本次演講中討論（模引理）。這個論證可以稱為代數論證。（b）以及插入結 K' 的同位素為 PL 的（a）情況的證明是基於康威多項式。或者更確切地說是它的簡化版本

$$\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z)$$

透過使用它們的 PL 近似和 n -準同位素的概念（參見 arXiv:0103113），將其擴展到拓撲連結的同位素不變量（參見 arXiv:0312007）。

(a) 一般情況的證明是基於 2 變數 Conway 多項式

$$\nabla_{(K,K')}(z,w,\xi) \in \mathbb{Z}[z,w,\xi]/(\xi^2 + zw\xi - z^2 - w^2 - 4) \subset Q[z,w][\sqrt{z^2w^2 + 4(z^2 + w^2 + 4)}],$$

（參見 arXiv:0312007），更準確地說是關於其簡化版本係數的 1 參數子族 $\beta_1, \beta_2, \dots$,

$$\nabla_{(K,K')}(z)/\nabla_{(K)}(z)\nabla_{(K')}(z),$$

在 $lk = 0$ 的情況下，與 Cochran 導出的不變量序列一致。在 $lk = 1$ 的情況下，這些整數 β_i 表現出比原始更微妙的幾何行為

科克倫的不變量，正是這種微妙之處（如果時間允許，我們將在演講中討論）仍然使羅爾夫森的問題保持開放。