

***Категорные склейки, свёрточные поликатегории,
категорные системы и метод функциональных уравнений
в теории алгебр***

***Categorical splices, convolutional polycategories,
categorical systems and the method of functional equations
in algebra theory***

代數理論中的分類拼接、卷積多範疇、分類系統與函數方程式方法

Толоконников Г.К.

к.ф.-м.н., ФНАЦ ВИМ, Москва, Россия

Ph.D., FNATS VIM, Moscow, Russia

FNATS VIM 博士, 俄羅斯莫斯科

admci@mail.ru

Аннотация. Проблема построения физических теории старейшая и не теряющая актуальности. Потребности в новых физических теориях возникали для решения проблем квантовой теории поля (Ю.М. Широков), для описания феномена сознания (Р. Пенроуз), при восстановлении гамильтонова формализма для неголономных механик (В.В. Козлов) и так далее. В виду расширения многообразия физических теорий и, главное, необходимости выяснения взаимоотношений и взаимодействия между ними востребована теория систем. На физические теории можно смотреть как на теории физических систем, на биологические, химические и социальные теории можно смотреть как на теории биологических, химических и социальных систем. Предметом теории систем является изучение систем, связей между ними, включая изучение различных физических теорий, таких, например, как квантовая и классическая механики, то есть изучение классических систем и квантовых систем. Обычно физическая теория состоит из наблюдаемых и состояний. Наблюдаемые можно перемножать, то есть они образуют различного рода алгебры, состояния являются функционалами над этими алгебрами. Таким образом, поиски новых физических теорий начинаются с алгебр наблюдаемых. Автор вместе со своим научным руководителем Ю.М. Широковым начинали с поиска новых алгебр наблюдаемых в аксиоматике гамильтоновых механик. Возник метод функциональных уравнений в теории алгебр, с помощью которого помимо поиска новых алгебр, были решены также старая задача суммирования рядов Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, уравнение Янга-Бакстера для некоторых не полупростых алгебр Ли и другие задачи, о чём будет сказано в работе. Переход к изучению различных систем, инициированный задачей поиска новых физических теорий, привёл к построению категорных систем, для которых построены оказавшиеся необходимыми новые виды категорных объектов, именно, свёрточные поликатегории и категорные склейки. На основе опирающегося на них категорного языка предложена формализация теории функциональных систем Анохина, что также рассмотрено в работе.

Ключевые слова: классическая механика, квантовая механика, алгебры наблюдаемых, алгебры Ли, категории, поликатегории, системы, функциональные системы, категорные

Annotation. The problem of constructing physical theories is the oldest and still relevant. The need for new physical theories arose to solve the problems of quantum field theory (Yu.M. Shirokov), to describe the phenomenon of consciousness (R. Penrose), to restore the Hamiltonian formalism for nonholonomic mechanics (V.V. Kozlov) and so on. In view of the expansion of the variety of physical theories and, most importantly, the need to clarify the relationships and interactions between them, systems theory is in demand. Physical theories can be looked at as theories of physical systems, biological, chemical and social theories can be looked at as theories of biological, chemical and social systems. The subject of systems theory is the study of systems and the connections between them, including the study of various physical theories, such as quantum and classical mechanics, that is, the study of classical systems and quantum systems. Typically, a physical theory consists of observables and states. Observables can be multiplied, that is, they form various kinds of algebras, the states are functionals over these algebras. Thus, the search for new physical theories begins with algebras of observables. The author, together with his scientific advisor Yu.M. Shirokov began with the search for new algebras of Hamiltonian mechanics observable in the axiomatics. The method of functional equations in the theory of algebras arose, with the help of which, in addition to the search for new algebras, the old problem of summing the Baker-Campbell-Hausdorff series, the Yang-Baxter equation for some non-semisimple Lie algebras and other problems were solved, which will be discussed in the work. The transition to the study of various systems, initiated by the task of searching for new physical theories, led to the construction of categorical systems, for which new types of categorical objects were constructed, which turned out to be necessary, namely, convolutional polycategories and categorical gluings. Based on the categorical language based on them, a formalization of Anokhin's theory of functional systems is proposed, which is also considered in the work.

Keywords: classical mechanics, quantum mechanics, algebras of observables, Lie algebras, categories, polycategories, systems, functional systems, categorical systems

註解。 建構物理理論的問題是最古老的，但仍具有現實意義。需要新的物理理論來解決量子場論問題 (Yu. M. Shirokov)、描述意識現象 (R. Penrose)、恢復非完整力學的哈密頓形式主義 (V. V. Kozlov) 等等。鑑於物理理論種類的擴展，最重要的是，需要澄清它們之間的關係和相互作用，因此需要系統理論。物理理論可以被視為物理系統的理論，生物、化學和社會理論可以被視為生物、化學和社會系統的理論。系統論的學科是對系統及其之間聯繫的研究，包括對各種物理理論的研究，如量子力學和經典力學，即經典系統和量子系統的研究。通常，物理理論由可觀測值和狀態組成。可觀測量可以相乘，也就是說，它們形成各種代數，狀態是這些代數的泛函。因此，對新物理理論的探索始於可觀測量的代數。作者和他的科學顧問 Yu. M. 希羅科夫開始尋找公理學中可觀察到的哈密頓力學的新代數。代數理論中的函數方程式方法出現了，借助它，除了尋找新的代數之外，還解決了對 Baker-Campbell-Hausdorff 級數求和、某些非半簡單的 Yang-Baxter 方程的老問題李代數和其他問題都得到了解決，這些問題將在工作中討論。由尋找新物理理論的任務引發的向各種系統研究的轉變導致了分類系統的構建，為此構建了新類型的分類對象，結果證明這是必要的，即卷積多類別和絕對粘合。基於它們的分類語言，提出了 Anokhin 功能系統理論的形式化，這也在工作中得到了考慮。

關鍵字：經典力學、量子力學、可觀測量代數、李年齡、範疇、多範疇、系統、函數系統、分類系統

1. Введение

Проблема построения физических теории старейшая и не теряющая актуальности. Потребности в новых физических теориях возникали для решения проблем квантовой теории поля ([Широков, 1975]), для описания феномена сознания ([Пенроуз, 1989]), при восстановлении гамильтонова формализма для неголономных механик ([Козлов, 1983]) и так далее. В виду расширения многообразия физических теорий и, главное, необходимости выяснения взаимоотношений и взаимодействия между ними востребована теория систем. На физические теории можно смотреть как на теории физических систем, на биологические, химические и социальные теории можно смотреть как на теории биологических, химических и социальных систем. Предметом теории систем является изучение систем, связей между ними, включая изучение различных физических теорий, таких, например, как квантовая и классическая механики, то есть изучение классических систем и квантовых систем. Обычно физическая теория состоит из наблюдаемых и состояний. Наблюдаемые можно перемножать, то есть они образуют различного рода алгебры, состояния являются функционалами над этими алгебрами. Таким образом, поиски новых физических теорий начинаются с алгебр наблюдаемых. Автор вместе со своим научным руководителем Ю.М. Широковым начинали с поиска новых алгебра наблюдаемых в аксиоматике гамильтоновых механик. Возник метод функциональных уравнений в теории алгебр, с помощью которого помимо поиска новых алгебр, были решены также старая задача суммирования рядов Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа, уравнение Янга-Бакстера для некоторых не полупростых алгебр Ли и другие задачи, о чём будет сказано в работе. Переход к изучению различных систем, инициированный задачей поиска новых физических теорий, привёл к построению категорных систем, для которых построены оказавшиеся необходимыми новые виды категорных объектов, именно, свёрточные поликатегории и категорные склейки. На основе опирающегося на них категорного языка предложена формализация теории функциональных систем Анохина, что также рассмотрено в работе.

2. Задача поиска формализмов новых физических теорий

Работа посвящена новому разделу категорной математики, именно, теории категорных склеек и её приложениям в общей теории систем. Язык категорных склеек единообразно описывает основные алгебраические структуры от универсальных алгебр до поликатегорий и высших категорий и даёт примеры новых алгебраических структур, применяемых, в частности, в общей теории систем. Категорные склейки вводятся как формальные логические теории с моделями в различных универсумах, включая различные категории, в том

числе, отличные от категории множеств. Поликатегории Сабо [Szabo, 1975] и введенные автором ранее [Толоконников, 2016] свёрточные поликатегории являются частными моделями категорных склеек. Помимо новых алгебраических структур теория категорных склеек предлагает описание известных категорных дуальностей и примеры новых видов дуальностей, включая дуальности, собственно, самих категорных склеек. Среди приложений имеется представление традиционных искусственных нейронных сетей произвольной топологии свёрточными поликатегориями, дуальности в которых применяются, в частности, для уточнения и обоснования известных формул Осовского вычисления градиентов в методе обратного распространения ошибки. Предлагается категорная модель нейрона, учитывающая не только его спайковую активность, но и другие виды межклеточной коммуникации и нейронных сетей с топологией высших категорных склеек, далеко обобщающей виды соединений нейронов в традиционных искусственных нейронных сетях. Предложенная ранее автором формализация теории функциональных систем П.К.Анохина-К.В.Судакова аксиоматизирована с помощью категорных склеек и предлагается в виде категорной теории систем в качестве общей теории систем. Категорная теория систем включает формализованные системообразующий фактор, принципы изоморфизма и иерархии, постулированные на интуитивном уровне для общих систем П.К.Анохиным. Категорная теория систем, опираясь на строгое определение системы, даёт исчерпывающее и строгое понятие системного подхода, продемонстрированное в работе на примере аграрной биомашсистемы. В работе построена категорная система гомеостаза, в которой преодолены многие неясности и противоречия обычных интуитивных построений функциональных систем физиологами. Многочисленные схемы функциональных систем, предлагаемые в трудах физиологов школы П.К.Анохина-К.В.Судакова, доработаны до категорных диаграмм. Аналогичная работа проделана для химических формул и модели «атомы в молекулах» по Бейдеру, возникшее направление категорной химии применяется для категорного моделирования молекул ДНК и РНК. Строгие алгебраические модели биомолекул предложены в качестве новых методов для алгебраической биологии, в которой, таким образом, становится возможным учитывать алгебраические свойства биомолекул для работы с геномом. Содержание работы, включая системные исследования, является продолжением работ в направлении проблемы поиска формализмов для алгебр наблюдаемых новых физических теорий. Первоначально эта проблема, инициированная рядом вопросов квантовой теории поля, была поставлена для гамильтоновых механик Ю.М. Широковым, давшим аксиоматику таких механик. В дальнейшем эта же проблема была поставлена Р.Пенроузом в контексте поиска формализмов новых физических теорий более подходящих, чем известные формализмы, для описания феномена сознания. Имеются и другие направления поиска

формализмов физических теорий, например, механика Намбу [Nambu, 1983] и другие.

Алгебра наблюдаемых гамильтоновых теорий по указанной аксиоматике имеет две бинарные операции π , σ (аналоги ассоциативного умножения операторов и коммутатора), удовлетворяющие следующим тождествам (A , B , C - наблюдаемые)

$$\begin{aligned}\sigma A \pi B C &= \pi \sigma A B C + \pi B \sigma A C \\ \sigma A \sigma B C &= \sigma \sigma A B C + \sigma B \sigma A C \\ \sigma A B + \sigma B A &= 0\end{aligned}$$

Если операция π ассоциативна, то дополнительно имеет место тождество

$$\pi A \pi B C = \pi \pi A B C \quad .$$

Очевидно, в алгебре наблюдаемых должны быть в первую очередь координаты, импульсы, моменты количества движения и другие наблюдаемые, являющиеся полиномами от импульсов и координат.

Билинейные бинарные операции умножения на полиномах для квантовой механики можно выразить в виде псевдодифференциальных операторов как рядов от операций дифференцирования, так при стандартном квантовании (в единицах с постоянной Планка равной 1, $i^2 = -1$) имеем

$$\begin{aligned}\pi A B &= \pi A(x_1, p_1) B(x_2, p_2) = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1}) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2) = \\ &= (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2)|_{1=2}, \\ \pi p x &= \omega (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) p_1 x_2 = xp + i, \quad \pi px - \pi xp = [p, x] = i.\end{aligned}$$

Если принять, что операция умножения не зависит от точки фазового пространства, то она в общем случае является рядом от дифференцирований, то есть операции $\pi = \omega \pi(\partial_1, \partial_2)$, $\sigma = \omega \sigma(\partial_1, \partial_2)$ (заменяем дифференцирования $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ на формальные переменные x, y, z , заодно, будем рассматривать более общий случай, включающий нечётное число формальных переменных) удовлетворяют функциональным уравнениям:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) \sigma(x + y, z) + \sigma(y, z) \sigma(y + z, x) + \sigma(z, x) \sigma(y + z, x) &= 0, \\ \sigma(x, y) + \sigma(y, x) &= 0 \\ \sigma(x, y + z) \pi(y, z) &= \pi(x + y, z) \sigma(x, y) + \pi(y, x + z) \sigma(x, z) \quad .\end{aligned}$$

Тождество ассоциативности приводит к уравнению

$$\pi(x, y) \pi(x + y, z) = \pi(y, z) \pi(x, y + z) \quad .$$

Общее решение системы приведённых четырех функциональных уравнений даёт классификацию гамильтоновых ассоциативных механик, среди которых заведомо имеется классическая и квантовая механики. При этом такая классификация отвечает на весьма интересный для физиков вопрос о том какие, вообще, есть квантования, имеются вейлевское, виковское, упомянутое стандартное с $\pi = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1})$ и другие квантования, есть ли ещё квантования помимо известных и нельзя ли их все перечислить. Действительно, какое бы ни было квантование, оно определяет операцию умножения, удовлетворяющую ассоциативности и указанному функциональному уравнению.

Уже в решении указанного уравнения появились приёмы, вошедшие в метод функциональных уравнений в теории алгебр, разработанный автором [Толоконников, 1986], [Толоконников, 1988]. Общая задача, в которую входит поиск алгебр наблюдаемых новых физических теорий (в частности, гамильтоновых) состоит в следующем [Толоконников, 1988].

Пусть $K[x]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ кольцо полиномов над полем K нулевой характеристики, $\partial_i = \partial / \partial x_i$ - дифференцирования кольца $K[x]$. Элемент $\Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m)$ левого $K[x]$ -модуля $K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]]$ формальных степенных рядов по переменным $\partial^i = (\partial_1^i, \dots, \partial_n^i)$, $i = 1, \dots, m$ с коэффициентами из $K[x]$ задаёт на $K[x]$ m -арную K -линейную операцию Ω , ω -диагональная проекция $\omega: K[x^1, \dots, x^m] \rightarrow K[x]$, определяемая на базисе в $K[x^1, \dots, x^m]$ посредством формулы

$$\omega(x^1)^{\alpha_1} \dots (x^m)^{\alpha_m} = x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}$$

и распространяемая на остальные элементы по линейности.

Здесь и ниже используются стандартные мультииндексные обозначения: α_i - набор n целых неотрицательных чисел

$$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}), (x^i)^{\alpha_i} = (x^i)^{\alpha_{i_1}} \dots (x^i)^{\alpha_{i_n}}, |\alpha_i| = \sum_{j=1}^n \alpha_{i_j},$$

$$\alpha_i + \alpha_j = (\alpha_{i_1} + \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{i_n} + \alpha_{j_n}), \partial^{\alpha_i} = \partial^{|\alpha_i|} / \partial x_1^{\alpha_{i_1}} \dots \partial x_n^{\alpha_{i_n}}.$$

Указанная операция Ω в этих обозначениях задаётся формулой

$$\Omega A_1 \dots A_m = \omega \Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m) A_1(x^1) \dots A_m(x^m) =$$

$$= \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) \partial^{\alpha_1} A_1(x) \dots \partial^{\alpha_m} A_m(x), \Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m) \in K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]].$$

Формальный ряд $\Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m)$ называется ядром операции Ω .

Диагональную проекцию удобно представить в виде композиции K -линейных отображений

$$\omega A(x^1, \dots, x^m) = \omega_0(\omega_{12}(\dots \omega_{m-1m} A(x^1, \dots, x^m) \dots)), A \in K[x^1, \dots, x^m],$$

задаваемых на базисе в $K[x]$ и в $K[x^1, \dots, x^m]$ посредством формул

$$\omega_0(x^j)^\alpha = x^\alpha, \omega_{ij} f = f|_{x^j=x^i}, f \in K[x^1, \dots, x^m].$$

Если ввести обозначение $\omega_{i_1 \dots i_g} = \omega_{i_1 i_2} * \omega_{i_2 i_3} * \dots * \omega_{i_{g-1} i_g}$, где $*$ композиция K -векторных эндоморфизмов $End_K K[x^1, \dots, x^m]$ кольца $K[x^1, \dots, x^m]$, то предыдущее запишется в виде $\omega A = \omega_0(\omega_{12 \dots n} A)$.

При использовании ω_{ij} операций правило Лейбница для дифференцирований $\partial_\mu = \partial / \partial x_\mu, \partial_\mu^i = \partial / \partial x_\mu^i$ запишется так

$$\begin{aligned} \partial_\mu^i * \omega_{ij} &= \omega_{ij} * (\partial_\mu^i + \partial_\mu^j), \partial_\mu \omega_0 A(x^1) = \omega_0 \partial_\mu^1 A(x^1), \\ \partial_\mu^{i_1} \omega_{i_1 \dots i_g} &= \omega_{i_1 \dots i_g} (\partial_\mu^{i_1} + \dots + \partial_\mu^{i_g}), A \in K[x]. \end{aligned}$$

Существует m таких естественных вложений, $id_j, j=1, 2, \dots, m$, что

$$\begin{aligned} id_j : K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]] &\rightarrow End_K K[x^1, \dots, x^m], \\ id_j \Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m) &= \Omega(x^j, \partial^1, \dots, \partial^m), \end{aligned}$$

причём $\Omega(x^j, \partial^1, \dots, \partial^m)$ определяет K -векторный эндоморфизм кольца $K[x^1, \dots, x^m]$ по формуле

$$\Omega(x^j, \partial^1, \dots, \partial^m) A(x^1, \dots, x^m) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x^j) \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} A(x^1, \dots, x^m).$$

Поскольку арность операции Ω не фиксируется, удобно кольца полиномов $K[x^1, \dots, x^m]$ рассматривать в качестве подколец кольца $K[x^1, \dots, x^m, \dots]$ полиномов счётного числа переменных $x^1, \dots, x^m, \dots$, а $End_K K[x^1, \dots, x^m]$ - в качестве подколец кольца $End_K K[x^1, \dots, x^m, \dots]$, именно каждый эндоморфизм $\alpha \in End_K K[x^1, \dots, x^m]$ индуцирует эндоморфизм $\tilde{\alpha} \in End_K K[x^1, \dots, x^m, \dots]$, определенный соотношением $\tilde{\alpha} f = \alpha f_m$, где $f_m \in K[x^1, \dots, x^m] \subset K[x^1, \dots, x^m, \dots]$ и $f - f_m$ является элементом идеала в $End_K K[x^1, \dots, x^m, \dots]$, порожденного множеством $\{x^j | j > m\}$.

Композицию K -векторных эндоморфизмов кольца $End_K K[x^1, \dots, x^m]$

будем также обозначать звездочкой $*$:

$$(\Omega_1 * \Omega_2) A = \Omega_1 (\Omega_2 A), \Omega_1, \Omega_2 \in \text{End}_K K[x^1, x^2, \dots], A \in K[x^1, x^2, \dots].$$

Обозначим множество конечноместных операций K -полилинейных на $K[x]$ через $\Omega^{(\infty)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega^{(i)}$, $\Omega^{(i)}$ - множество K -полилинейных операций на $K[x]$ арности i .

Множество операций $\Omega^{(m)}$ на $K[x]$ фиксированной арности является K -векторным пространством

$$\left(\sum_i a_i \Omega_i \right) A_1 \dots A_m = \sum_i a_i \Omega_i A_1 \dots A_m, a_i \in K, i = 1, 2, \dots, \Omega_i \in \Omega^{(m)}.$$

Отметим важное подкольцо кольца $\text{End}_K \Omega^{(m)}$, индуцированное эндоморфизмами $\text{End}_K K[x]$, а именно, каждый элемент $U \in \text{End}_K K[x]$ продолжается до эндоморфизма $\hat{U} \in \text{End}_K \Omega^{(m)}$ по формуле

$$(\hat{U} \Omega)(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m} U \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) (\partial^1)_1^{\alpha_1} \dots (\partial^m)^{\alpha_m},$$

где $\Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) (\partial^1)_1^{\alpha_1} \dots (\partial^m)^{\alpha_m}$ - ядро операции Ω .

Эндоморфизм $\hat{U}$ имеет вид

$$(\hat{U} \Omega)(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = U(x, \hat{\partial}) \Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m),$$

где $\hat{\partial} = (\hat{\partial}/\partial x_1, \dots, \hat{\partial}/\partial x_n)$ - набор операторов дифференцирования ряда $\Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m)$ по переменным $x_1, \dots, x_n$, оператор $\hat{\partial}$ снабжен шляпкой, чтобы отличать его от $\partial^1, \dots, \partial^m$ являющихся в $K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]]$ формальными переменными.

Операцию композиции эндоморфизмов из $\text{End}_K \Omega^{(m)}$ обозначим также через $*$. Аналогично продолжаются отображения ω_0, ω_{ij} :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_0 \Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m) &= \Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m), \hat{\omega}_{ij} \Omega(\dots, x^i, \dots, x^j, \dots, \partial^1, \dots, \partial^m) = \\ &= \Omega(\dots, x^i, \dots, x^i, \dots, \partial^1, \dots, \partial^m), \hat{\omega}_{i_1 \dots i_g} = \hat{\omega}_{i_1 i_2} * \hat{\omega}_{i_2 i_3} * \dots * \hat{\omega}_{i_{g-1} i_g} \\ \hat{\omega} \Omega &= \hat{\omega}_0(\hat{\omega}_{1 \dots m} \Omega), \Omega \in K[x^1, \dots, x^m][[\partial^1, \dots, \partial^m]]. \end{aligned}$$

Имеет место аналог формул коммутации

$$\hat{\partial}_\mu^i * \hat{\omega}_{ij} = \hat{\omega}_{ij} * (\hat{\partial}_\mu^i + \hat{\partial}_\mu^j), \hat{\partial}_\mu \hat{\omega}_0 \Omega = \hat{\omega}_0 \hat{\partial}_\mu^1 \Omega.$$

Можно показать, что операция дифференцирования $D_j = \partial/\partial(\partial_j)$ по

переменным ∂_j кольца формальных рядов $K[x][[\partial]]$, $x=(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет соотношению

$$D_j(U*V)=(D_j U)*V+U*D_j V, U, V \in K[x][[\partial]] .$$

Операции $\hat{\omega}, \hat{\omega}_0, \hat{\omega}_{\alpha\beta}$ коммутируют с $D_j(\alpha, \beta=1, \dots, n)$:

$$D_j \hat{\omega} U = \hat{\omega} D_j U, D_j \hat{\omega}_0 U = \hat{\omega}_0 D_j U, D_j \hat{\omega}_{ij} U = \hat{\omega}_{ij} D_j U .$$

Удобно отождествлять операции с их ядрами, которые реализуют частный случай полипсевдодифференциальных операторов. Конечноместные операции образуют частичную алгебру $\{\Omega, *\}$ по отношению к их композиции, обозначенной звёздочкой. Таким образом, через звёздочку обозначено три различных объекта (композиции эндоморфизмов из $End_K K[x]$ и из $End_K \Omega^{(m)}$, а также композиция операций $\Omega^{(\infty)}$), что, однако, при учёте контекста не приводит к путанице.

Для композиции $U*V$ эндоморфизмов из $End_K K[x]$, как можно показать, имеется явная формула

$$(U*V)(x, \partial) = \check{\omega} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \hat{\partial}_{x_j} D_j^1 \right\} U(x^1, \partial^1) V(x^2, \partial^2) ,$$

где $U(x^1, \partial^1), V(x^2, \partial^2)$ ядра операторов, D_j^1 дифференцирование формального ряда $U(x^1, \partial^1)$ по формальной переменной ∂_j^1 , $\hat{\partial}_{x_j^2}$ - дифференцирование формального ряда $V(x^2, \partial^2)$ по формальной переменной x_j^2 , $\check{\omega}$ - диагональная проекция как по переменным x_j , так и по ∂_j , то есть $\check{\omega} A(x^1, x^2, \partial^1, \partial^2) = A(x, x, \partial, \partial) \in K[x][[\partial]]$.

Оператор $U \in End_K K[x]$ определён для любой операции из $\{\Omega, *\}$. От частичной алгебры $\{\Omega, *\}$ с помощью обратимого оператора $U = Aut_K \Omega^{(m)}$, который является продолжением $U = Aut_K k[x]$ можно перейти к эквивалентной частичной алгебре $\{\Omega, \circ\}$ с частичной операцией $\circ$

$$\hat{U}(\Omega_1 * \Omega_2) = \hat{U} \Omega_1 \circ \hat{U} \Omega_2 ,$$

для которой оператор D_j , как это можно показать, является дифференцированием.

Наконец, мы можем сформулировать ключевую задачу метода функциональных уравнений в теории алгебр, которая является основой для

проблемы поиска формализмов алгебр наблюдаемых новых физических теорий.

Пусть теперь на $K[x]$ задана m -арная K -линейная операция Ω , удовлетворяющая тождеству, представимому в виде

$$\xi = 0 \quad ,$$

где ξ линейная комбинация с коэффициентами из K производных для операции Ω операций одинаковой ариности a . Например, для бинарных операций π в алгебрах над полем нулевой характеристики можно без потери общности ограничиться рассмотрением полилинейных, так как в этом случае любое тождество эквивалентно системе полилинейных ξ [Жевлаков, 1978]. Более того, для этого случая А.И.Мальцев [Мальцев, 1950] задачу описания возможных тождеств свёл к перечислению неэквивалентных неприводимых представлений симметрических групп. Ядро $\xi(x, \partial^1, \dots, \partial^m)$, $a \geq m$ операции ξ может быть вычислено по ядру операции Ω , если воспользоваться введенными выше понятиями и определениями. Таким образом, каждое тождество порождает *-операторное функциональное уравнение для ядра операции Ω

$$\xi(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = 0 \quad . \quad (*)$$

Например, если π ассоциативная бинарная операция, то равенство нулю ассоциатора приводит для ядра $\pi(x, \partial^1, \partial^2)$ к *-операторному функциональному уравнению ассоциативности

$$\omega \{ \pi(x^1, \partial^1 + \partial^2, \partial^3) * \pi(x^1, \partial^1, \partial^2) - \pi(x^1, \partial^1, \partial^2 + \partial^3) * \pi(x^2, \partial^2, \partial^3) \} = 0 \quad .$$

При наличии в универсальной алгебре нескольких операций различной ариности имеющиеся в алгебре тождества приводят к системе *-операторных уравнений (*).

Так, аксиомы для алгебр наблюдаемых гамильтоновых механик приводят к системе *-операторных уравнений

$$\begin{aligned} \omega \{ & \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2 + \partial^3) * \sigma(x^2, \partial^2, \partial^3) - \sigma(x^1, \partial^1 + \partial^2, \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2) - \\ & - \sigma(x^1, \partial^2, \partial^1 + \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^3) \} = 0, \\ \omega \{ & \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2 + \partial^3) * \pi(x^2, \partial^2, \partial^3) - \pi(x^1, \partial^1 + \partial^2, \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2) - \\ & - \pi(x^1, \partial^2, \partial^1 + \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^3) \} = 0, \\ & \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2) + \sigma(x^1, \partial^2, \partial^1) = 0. \end{aligned}$$

Системы *-операторных функциональных уравнений впервые введены автором, также им найдены общие решения ряда таких систем, инвариантных

относительно некоторых групп Ли. В частности, обсуждаемые уравнения с ядрами операций, не зависящими от самих переменных $x = (x_1, \dots, x_m)$, относятся к алгебрам, инвариантным относительно группы сдвигов (группы Гейзенберга).

Итак, если на алгебру наблюдаемых гамильтоновой теории наложить выполняющееся в квантовой и классической механиках естественное условие, что она содержит полиномы (как вариант, от координат и импульсов частиц) и что операции линейны по каждому из сомножителей, то тогда алгебры наблюдаемых всех возможных физических теорий лежат среди решений указанной системы *-операторных функциональных уравнений гамильтоновости.

Общее решение указанных уравнений даёт полную классификацию гамильтоновых алгебр и тем самым всех возможных гамильтоновых механик.

Далее мы обсудим до какого уровня дошло продвижение в решении этой задачи и куда на современном этапе вывела сама проблема поиска новых физических теорий, отличных от классической и квантовой.

Пуассоново умножение в аксиомах гамильтоновых механик при наличии антисимметрии является лиевым, трансляционно инвариантные бесконечномерные алгебры Ли, удовлетворяющие выписанным выше функциональным уравнениям гамильтоновых механик в то время были в кругу интересов строившего классификацию локальных алгебр Ли А.А.Кириллова [Кириллов, 1976].

Постепенно были решены функциональные уравнения для тождеств хоть как-то относящихся к физике, были классифицированы трансляционно инвариантные йордановы, бинарно-лиевы алгебры, алгебры близкие к ассоциативным, наконец, появились классы новых алгебр в результате решения *-операторных функциональных уравнений. Сформировался некоторый инструментарий приемов, который составил метод функциональных уравнений в теории алгебр.

Уровень трудностей при решении *-операторных уравнений можно оценить несколькими «побочными» задачами, которые удалось решить в процессе поиска новых алгебр наблюдаемых. Одна из таких задач состоит в известной нерешенной проблеме суммирования рядов Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа в формальной теории групп (не ясно как приводить подобные члены из разрастающегося числа коммутаторов при суммировании рядов), с этими рядами связаны версии вычисления интеграла Фейнмана по путям. Важным примером является уравнение ассоциативности, связанное с квантовым уравнением Янга-Бакстера, для которого методом функциональных уравнений удалось найти первое общее решение для простейшей из неполупростых алгебр Ли. Приведём для примера вычисленную [Толоконников, 1987] методом функциональных уравнений (где просуммирован ряд Бейкера-Кэмпбелла-

Хаусдорфа для группы Лоренца) операцию умножения (аналог приведённого выше стандартного умножения $\pi A B = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1}) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2)$)

$$\begin{aligned}
 (\pi AB)(\alpha, \dots, \mu) &= \omega \pi(\alpha, \dots, \partial^2) A(\alpha_1, \dots, \mu_1) B(\alpha_2, \dots, \mu_2); \\
 \ln \pi(\alpha, \dots, \partial^2) &= -\alpha \partial_{\alpha_2} - \nu \partial_{\nu_2} - \mu \partial_{\mu_1} - \beta \partial_{\beta_1} - \gamma \ln R + 2w\Delta + R \exp(-\partial_{\gamma_1}) \{[\nu \partial_{\nu_2} + \alpha \partial_{\alpha_2} + \\
 &+ (\nu \partial_{\mu_1} - \alpha \partial_{\beta_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \cos \partial_{w_1} + [\alpha \partial_{\nu_2} - \nu \partial_{\alpha_2} + (\alpha \partial_{\mu_1} + \nu \partial_{\beta_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \sin \partial_{w_1} \} + \\
 &+ 2 \exp(-\partial_{\gamma_2})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)^{-1} \{(\beta \partial_{\nu_2} + \mu \partial_{\alpha_2}) \sin \partial_{w_2} + (\mu \partial_{\nu_2} - \beta \partial_{\alpha_2}) \cos \partial_{w_2} - R[\mu \partial_{\nu_2} - \beta \partial_{\alpha_2} + \\
 &+ (\beta \partial_{\beta_1} + \mu \partial_{\mu_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \cos(\partial_{w_2} + 2\Delta) - \\
 &- R[\beta \partial_{\nu_2} + \mu \partial_{\alpha_2} + (\beta \partial_{\mu_1} - \mu \partial_{\beta_1})(\partial_{\alpha_2}^2 + \partial_{\nu_2}^2)/2] \sin(\partial_{w_2} + 2\Delta)\}, \\
 \text{где} \\
 \Delta &= \arcsin(\partial_{\nu_2} / \sqrt{\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2}) - \arcsin([2\partial_{\nu_2} + \partial_{\mu_1}(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)] / 2\sqrt{R(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)}), \\
 R &= [1 + \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_2} - \partial_{\beta_1} \partial_{\alpha_2} + (\partial_{\mu_1}^2 + \partial_{\beta_1}^2)(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/4]^{-1}, A, B \in \mathfrak{H}.
 \end{aligned}$$

С перечисленными результатами можно ознакомиться по [Толоконников, 1986], [Толоконников, 1988] и приведённым там ссылкам.

В последние десятилетия 20 века развивалось два важнейших для проблемы поиска новых формализмов для алгебр наблюдаемых направления. Первое, что имеется в виду, это выход в свет книг Р. Пенроуза [Пенроуз, 2005], в которых он демонстрирует недостаточность имеющихся физических теорий для описания феномена сознания и **ставит задачу поиска новых физических теорий** для столь фундаментальной проблемы человечества. Здесь и сильный искусственный интеллект и «может ли машина мыслить?»... Но на этом мы не будем останавливаться, сославшись на три книги автора по этому поводу [Толоконников, 2007, 2011, 2012].

Второе, это осознание и развертывание того, что Васюков В.Л. называет «плюрализмом» [Васюков, 2012], означающим существование многочисленных логик, математик и, добавим, физик...

Первопроходцами здесь являются, безусловно, ученые Казанской математической школы Н.И. Лобачевский, открывший неевклидову геометрию, и П.С. Порецкий, предложивший и изучавший первую трехзначную логику [Порецкий, 1884].

Сам термин «теория» в названии направления «поиска новых физических теорий» требует обязательного на некотором шаге развития уточнения. В настоящее время этот термин понимается на основе построения из букв алфавита правильно построенных формул, некоторые из которых называются аксиомами, правил вывода (исчисления, логика) с дальнейшей интерпретацией такой формальной конструкции в подходящем универсуме.

Следующий неизбежный этап в развитии обсуждаемого направления состоит в обращении к теории систем. Мы уточнили термин «теория», но он идёт в паре с термином «физическая». Очевидно, и никто не будет спорить, что

бывает несколько типов теорий, физическая, химическая, биологическая и тому подобное. Поэтому естественно перейти от термина «физической теории» к «теории физических *систем*», соответственно, к теориям химических, биологических и других систем. А сама теория систем есть наука наук, как теперь общепризнанно (см., например, [Yi-Lin Forrest, 2018]). Тут, однако, всплывает редукционизм, часто встречающийся у физиков, как сведение химии к физике биологии к физике и... признание феномена сознания в качестве физического явления, для которого Р.Пенроуз поставил задачу отыскать подходящую *физическую* теорию. Но сознание проявляется, например, в функциональных системах в акцепторе результата действия... Р.Пенроуз ничего не говорит о сведении функциональных систем к физическим. Возможно, сведение будет происходить не в прямом смысле, а в погружении универсума функциональных систем в универсум систем физических или даже наоборот. По-видимому, подход здесь должен опираться на некую функционально-физическую систему, причем должен быть математический аппарат, точно описывающий такой вид систем. И этот аппарат суть *новая физическая* и одновременно *физиологическая теория*. Редукционизм есть и в самой физике, например, в виде сведения классической механики к квантовой. Теория систем предлагает взаимоотношения теорий рассматривать на своем системном уровне и языке. Простейший вариант редукционизма состоит в построении некоторого морфизма (предельного перехода, рассмотрения как подтеории и тому подобное) из одной теории в другую теорию. В фундаментальной работе Ю.М.Широкова по аксиоматике гамильтоновых механик [Широков, 1975] показано, что такого морфизма из квантовой механики в классическую нет, а взаимоотношение теорий описывается на другом уровне и языке.

Экскурс в системный подход (стоит, по-видимому, по крайней мере, сначала опираться только на сколь-нибудь формализованные версии системного подхода) ошеломляет несколькими десятками самого определения понятия системы. Однако все подходы (включая строгие подходы математических теорий систем) кроме теории функциональных систем, как это продемонстрировал П.К.Анохин [Анохин, 1973] грешат полным отсутствием ссылок на механизм, который из разрозненных частей, собственно, и собирает систему. Именно, этот механизм П.К.Анохин назвал системообразующим фактором и поставил его во главу угла самого понятия системы. Интуитивные построения П.К.Анохина, К.В.Судакова и их школы, в частности, в виде многочисленных схем функциональных систем, автор формализовал в категорной теории систем, используя язык категорных склеек и свёрточных поликатегорий. Замечательным образом схемы функциональных систем получили при определённой модернизации статус категорных диаграмм, на которые эти схемы очень похожи. Можно даже говорить об определённой изначальной формализации теории функциональных систем с помощью этих

схем. Отметим, что формализованные в категорной теории систем постулаты для систем, данные П.К.Анохиным, немедленно выводят на категорный язык и широкий класс универсумов, отличных от традиционного универсума теории множеств [Толоконников, 2018]. Данная работа в основном посвящена развитию аппарата категорной теории систем.

2. Категорные склейки

2.1. Поликатегории ввёл в 1985 г. Сабо [Szabo, 1975] (будем называть их поликатегориями Сабо), как набор полистрелок, композиция которых определена аналогично композиции стрелок и мультистрелок в категориях и мультикатегориях. Мы построим поликатегории и более общие свёрточные поликатегории из категорных склеек в разделе 3. Полистрелки имеют входы и выходы, ими естественно моделировать нейроны. Однако, связи (по которым распространяются спайки и другие связи межклеточной коммуникации) нейронов, наблюдаемые в мозге (см. обзор [Сидоров, 2012], а также [Anastassiou, 2011]), существенно богаче тех возможностей, которые может обеспечить композиция поликатегорий Сабо. В отдельном пункте мы напомним определение поликатегорий Сабо и покажем указанную ограниченность в отношении моделирования нейросетей.

Теория поликатегорий Сабо находит применения (см., например, [Shulman, 2020]), но весьма сложна, работа с ними "вручную", как это делает Сабо со слов Р.Гарнера сталкивается с проблемами: "Further problems arise when one wishes to address aspects of a putative 'theory of polycategories': what are the correct notions of polyfunctor or polytransformation? What is a polycategorical limit? In attempting to answer such questions without a formal framework, one is forced into the unsatisfactory position of relying on intuition alone" [Garner, 2008]. Для случая симметричных поликатегорий Р.Гарнер построил их представление в виде монад в подходящей двухсторонней бикатегории Клейсли, что для этого случая поликатегорий позволяет систематически развивать их теорию уже не "вручную". Построенное Г.Гарнером представление обобщает аналогичное известное представление мультикатегорий в виде моноидов в категориях распорок [Burroni, 1971], [Hermida, 2000], [Leinster, 2004]. Попытка подобного обобщения для произвольных поликатегорий в [Kosłowski, 2005] не привела к окончательному построению представления поликатегорий. Таким образом, общий случай поликатегорий Сабо остаётся в значительной степени при построении теории работой "вручную".

Сабо ввёл поликатегории для задач логики, так как правила вывода представляют собой в подходе Генцена полистрелки (конъюнкции посылок переводятся в дизъюнкции формул) и полистрелки, как можно показать, соединяются между собой с помощью одного выхода первой и одного входа

другой полистрелки. Такое ограничение в способах соединения полистрелок стрелок до некоторой степени снимается в PROP, введенных Маклейном [MacLane, 1965] (и в их разновидностях диоперадах и др., см. [Graves, 2020], а также обзор Markl M. Operads and PROPs, 2006, arXiv:math/0601129v3).

В нашем подходе мы исходим из нужд моделирования соединений нейронов в мозге, для чего не хватает соединений в виде изучаемых композиций полистрелок в поликатегориях Сабо и PROP, и теории систем, когда необходимо не только собирать систему из будущих подсистем, но и раскладывать ее на подсистемы. Для этого мы заменяем композиции полистрелок новым более общим видом связей, называемых свёртками, вводим и используем категорные склейки, из которых строятся поликатегории с явным заданием истории получения полистрелок (аналог нерва в категориях) [Толоконников, 2016, 2017, 2018].

2.2. Рассмотрим счётное число сортов с переменными и функциональными символами проекций $x_k^{(i)}, C^{(j)}, i, j, k \in \mathbb{N}$.

Вводим функциональные символы ξ_{ij} вида $(i \rightarrow j)$ со свойствами

$$\xi_{ij} \xi_{ji} x_k^{(i)} = x_k^{(j)}, i \neq j.$$

Для каждого i обозначим $\check{C}_i^{(j)} = \xi_{ij} C^{(j)} \xi_{ji}$ и вводим аксиомы

$$\check{C}_i^{(k)} \check{C}_i^{(j)} = \check{C}_i^{(l)} \quad (\check{C}_i^{(i)} \check{C}_i^{(i)} = \check{C}_i^{(i)}, i, j, k \in \mathbb{N}).$$

Таким образом, функциональные символы образуют (мета)алгебру, с таблицей умножения, отвечающей последним аксиомам.

Вводим обозначения для формул

$$Ob^{(i)}(x^{(i)}) \stackrel{\text{def}}{=} (x^{(i)} =_i C^{(i)}(x)),$$

а также переменные $a_k^{(i)}, k=1,2,3 \dots$ (объекты, области) сорта i , ограниченные на совокупность, состоящую из $Ob^{(i)}(x^{(i)})$, и ограниченные кванторы

$$\begin{aligned} \forall^{Ob} a_k^{(i)} W(a_k^{(i)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x^{(i)} (Ob(x^{(i)}) \supset W(x^{(i)})), \\ \exists^{Ob} a_k^{(i)} W(a_k^{(i)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x^{(i)} (Ob(x^{(i)}) \wedge W(x^{(i)})). \end{aligned}$$

Вводим предикаты равенства вида $(i \rightarrow j)$

$$x^{(i)} =_{ij} x^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} (x^{(i)} =_i \xi_{ij} x^{(j)}).$$

Вводим для каждого сорта набор базовых функциональных символов $\mu_l^{(i)}, \nu_l^{(i)}, \dots, l=1,2, \dots$, называемых n -арными операциями, $n=0,1,2,3, \dots$ и набор **тождеств**, как равенств термов одного сорта $t_m^{(i)} = t_k^{(i)}$.

Вводим счётное число $\alpha=1,2,3, \dots \in \mathbb{N}$ указанных наборов сортов, для

обозначения чего добавим дополнительный индекс, другими словами, рассматриваем уже переменные, символы, равенства, тождества и изоморфизмы, соответственно, $x_k^{(i,\alpha)}, C^{(i,\alpha)}, \mu_l^{(i,\alpha)}, \dots, =_{i,\alpha,i',\alpha'}, \xi_{ij}^{(\alpha)}$, отметим, что изоморфизмы, в отличие от равенств, не действуют между сортами для различных α .

Определение

Сигнатурой называется набор функциональных букв проекций и операций $C^{(i)}, \mu_l^{(i)}$.

Вводим три копии сортов $x_k^{(i,\alpha)}, C^{(i,\alpha)}, \mu_l^{(i,\alpha)}, \dots, =_{i,\alpha,i',\alpha'}, \xi_{ij}^{(\alpha)}$, первая из которых используется для **внешних свёрток**, в ней все буквы для их отличия от основных букв **внешней склейки** наделяются штрихом $x_k'^{(i,\alpha)}, C'^{(i,\alpha)}, \mu_l'^{(i,\alpha)}, \dots, =_{i,\alpha,i',\alpha'}, \xi_{ij}'^{(\alpha)}$, вторая используется для **внутренних свёрток** и наделяется, помимо штриха, еще надчеркиванием $\bar{x}_k'^{(i,\alpha)}, \bar{C}'^{(i,\alpha)}, \bar{\mu}_l'^{(i,\alpha)}, \dots, - =_{i,\alpha,i',\alpha'}, \bar{\xi}_{ij}'^{(\alpha)}$, третья используется для **внутренней склейки** и наделяется только надчеркиванием $\bar{x}_k^{(i,\alpha)}, \bar{C}^{(i,\alpha)}, \bar{\mu}_l^{(i,\alpha)}, \dots, - =_{i,\alpha,i',\alpha'}, \bar{\xi}_{ij}^{(\alpha)}$.

Определение

Полной базовой склейкой называется формула, составленная из конъюнкций формул

$$\begin{aligned} a_k^{(i,\alpha)} &=_{i,\alpha} C^{(i,\alpha)}(x_k^{(i,\alpha)}), a_k'^{(i,\alpha)} =_{i,\alpha} C'^{(i,\alpha)}(x_k'^{(i,\alpha)}), \\ \bar{a}_k'^{(i,\alpha)} &=_{i,\alpha} \bar{C}'^{(i,\alpha)}(\bar{x}_k'^{(i,\alpha)}), \bar{a}_k^{(i,\alpha)} =_{i,\alpha} \bar{C}^{(i,\alpha)}(\bar{x}_k^{(i,\alpha)}) \end{aligned}$$

и равенств $\eta_k^{(i,\alpha)} = \theta_m^{(j,\beta)}$, $\eta_k'^{(i,\alpha)}, \theta_m'^{(j,\beta)}$ являются любыми из символов $a_n^{(i)}, x_m^{(i)}, n, m \in \mathbb{N}$ указанных сортов, знак равенства имеет соответствующие опущенные здесь индексы.

Определение

Разнесём конъюнкции для каждой формулы полных склеек по четырем ячейкам таблицы 2x2. В ячейку (1,1) размещаем нештрихованные и без надчеркивания букв подформулы **внешних склеек**. В ячейку (1,2) размещаем содержащие буквы со штрихами подформулы **внешних свёрток**. В ячейку (2,1) размещаем содержащие буквы с надчеркиванием подформулы **внутренних склеек** и в ячейку (2,2) размещаем содержащие буквы с надчеркиванием и штрихами подформулы **внутренних свёрток**:

u	v'
-----	------

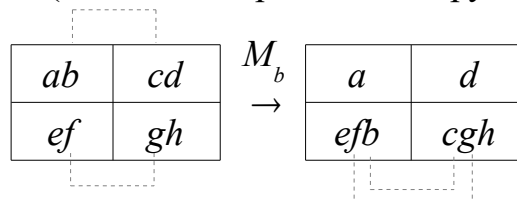
$\overline{w}$	$\overline{r'}$
----------------	-----------------

При размещении формулы в таблице штрихов и надчеркиваний можно не указывать, они при необходимости восстанавливаются очевидным образом. В этих обозначениях полная склейка представлена указанной таблицей.

По построению формул полных склеек подформулы равенства содержат только те буквы переменных, которые встретились в подформулах вида $a=C(x)$. Это позволяет знаки равенства (формулы с равенствами переменных) исключить из таблицы, заменив формулы равенства пунктирами, соединяющими буквы переменных, входящие в равенства.

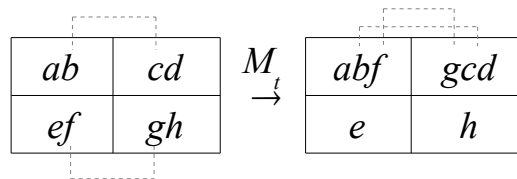
Зададим специфические для категорных склеек правила вывода M_t, M_r, M_l, M_b , переводящие одни формулы полных склеек в другие, за счет перемещения формул между ячейками таблицы полной склейки.

M_b перемещает в нижние ячейки из верхних те конъюнкции из формул, которые имеют соединения (одна из которых слева, другая справа),



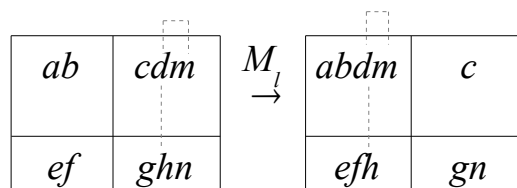
при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению M_b .

M_t перемещает в верхние ячейки из нижних те формулы, которые имеют соединения (одна из которых слева, другая справа)



при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению M_t .

M_l перемещает связанные по вертикали и внутри пары из правых ячеек в левые (направление движения налево)



при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению M_l .

M_r перемещает связанные пары из левых ячеек в правые (движение направо)

ab	c	M_r	a	bc
efm	g	$\rightarrow$	e	fmg

при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению M_r .

Вводится правило вывода Ev , и обратное ему Ev^{-1} , основанное на функциональных символах операций $\mu_l^{(i,\alpha)}$ и расстановке в соответствующих местах знаков $=$.

Применение свёртки, имеющейся в клетке (1,2) таблицы склейки, состоит из последовательного применения правил вывода M_b , M_l , Ev .

Операция обратная указанной, состоит из последовательного применения правил вывода Ev^{-1} , M_r , M_t .

Вводим правила вывода $P_{k,l}$, $k, l = 1, 2$, проектирующие полную склейку в её части, $P_{k,l}$ переводит полную склейку в содержимое (k,l) -клетки таблицы.

Определение

Полной склейкой называется базовая склейка, в которой переменные x (с индексами) заменены на термы формального языка сигнатуры из функциональных букв операций и проекций.

Определение

Попеудра применения свёртки, указанная выше для полных базовых склеек, дословно применима к полным склейкам и даёт индуктивное построение **формульных термов**:

полная базовая склейка и её $P_{k,l}$ -проекции являются формульными термами;

если имеется формульный терм, то применение к нему свёртки также является формульным термом, как и его $P_{k,l}$ -проекции, и других формульных термов не имеется.

Формульный терм, как полная склейка, разбивается на внешний, внешний и внутренний свёрточный и внутренний формульные термы.

Дадим определения для часто встречающихся разновидностей склеек.

Определение

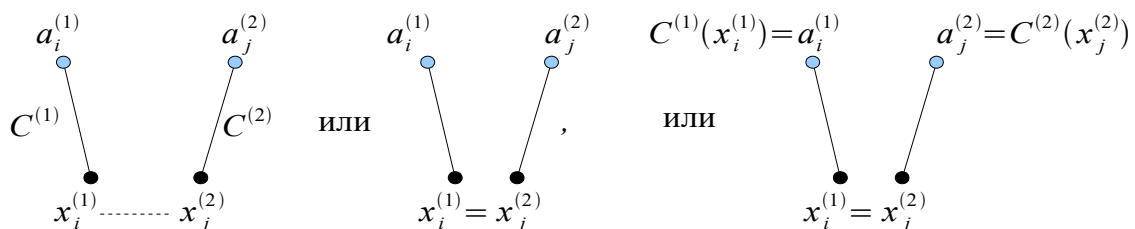
Формула $a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}$ называется **элементарной внешней склейкой** или **элементарным внешним конусом**, соответственно формулы $a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}$, $\bar{a}_k^{(i)} = \bar{C}^{(i)} \bar{x}_k^{(i)}$, $\bar{a}_k^{(i)} = \bar{C}^{(i)} \bar{x}_k^{(i)}$, называем **элементарной внешней свёрткой** или **элементарным внешним свёрточным конусом**, **элементарной внутренней склейкой** или **элементарным внутренним конусом**, **элементарной внутренней свёрткой** или **элементарным внутренним свёрточным конусом**. Когда имеется ввиду один (или любой) из подобных конусов, при этом неважно какой, то говорим просто об элементарной склейке или элементарном конусе. Набор n элементарных конусов (внешних формульных термов), в котором имеются равенства между всеми переменными (термами), независимо от возможных равенств между переменными объектов, называется **внешним n -конусом** или просто **внешним конусом**, когда неважно точное количество указанных равенств. Расстановкой штрихов и надчеркиваний получаем **внешний свёрточный конус**, **внутренний свёрточный конус** и **внутренний конус**. Таким образом, любая из четырех видов склеек состоит из набора соответствующих конусов. **Категорная склейка** содержит по определению все возможные склейки, получаемые с помощью имеющихся свёрток.

Теперь мы можем дать определение теории категорных склеек.

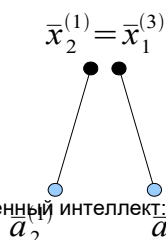
Определение

Формальной теорией категорных склеек называется сигнатура и набор тождеств вместе с совокупностью построенных выше формульных термов.

Следуя Хетчеру, введём аналогичные использованным в его книге [Hatcher, 1982] графические обозначения, например, для формулы $C^{(1)}(x_i^{(1)}) = a_i^{(1)} \wedge C^{(3)}(x_j^{(2)}) = a_j^{(2)} \wedge x_i^{(1)} = x_j^{(2)}$ имеем



В нижней строке таблицы склейки графические изображения формул (вместе с пунктирами равенств) будем отражать зеркально снизу вверх, например:



Для наглядности соединённые равенством разноразные имена или области будем на графике изображать ближе друг к другу (для приведённых рисунков такое соглашение учтено ввиду $x_i^{(1)} = x_j^{(2)}, x_2^{(1)} = x_1^{(3)}$).

Построим категорную склейку для традиционной теории категорий

Для представления склейками композиции стрелок категории понадобится восьмьюосновная теория (дополнительно к сорту внешних склеек для внешних свёрток необходимы два аргумента, к этим четырем сортам добавляем четыре сорта для представления внутренних склеек и свёрток). Вводим восьмьюосновную формальную теорию, переменные $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(8)}$, функциональные буквы $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \dots, C^{(8)}$, функциональные символы $\xi_{i,j}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, \dots, 8$ биекций, соответственно, вида $(j \rightarrow i)$, предикаты равенства $=_1, =_2, =_3, \dots, =_8$ в каждом сорте и предикат равенства $=$ для разных сортов.

Сорта отнесём к клеткам таблицы следующим образом

1, 2	3, 4
5, 6	7, 8

При переносе сортов справа налево (и наоборот) замена сортов имеет вид $3 \Leftrightarrow 1, 4 \Leftrightarrow 2, 7 \Leftrightarrow 5, 8 \Leftrightarrow 6$, при переносе сортов сверху вниз (и наоборот) имеем следующую замену сортов $1 \Leftrightarrow 5, 2 \Leftrightarrow 6, 3 \Leftrightarrow 7, 4 \Leftrightarrow 8$.

В обозначениях букв сохраним штрихи и надчеркивания, по которым удобно определять в какой клетке таблицы находится буква.

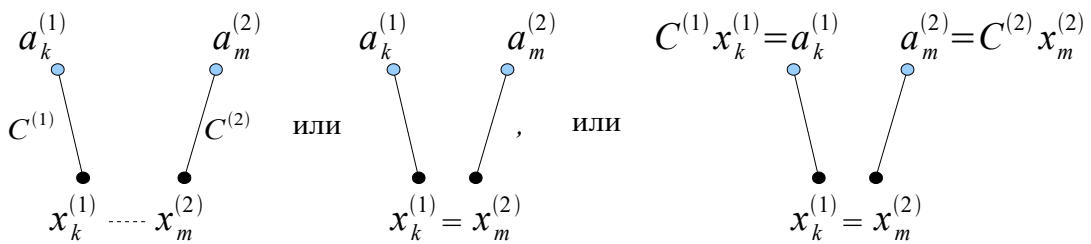
$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, C^{(1)}, C^{(2)}$	$x_i'^{(3)}, x_i'^{(4)}, C'^{(3)}, C'^{(4)}$
$\bar{x}_i^{(5)}, \bar{x}_i^{(6)}, \bar{C}^{(5)}, \bar{C}^{(6)}$	$\bar{x}_i'^{(7)}, \bar{x}_i'^{(8)}, \bar{C}'^{(7)}, \bar{C}'^{(8)}$

Вводим новые переменные $a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}$.

Предикат, отвечающий частичной операции композиции $\mu x_i^{(1)} x_j^{(1)} = x_i^{(1)} \circ x_j^{(1)}$ (умножаются переменные первого сорта), обозначим $P = P^{(1,1,1)}(x_i^{(1)}, x_j^{(1)}, x_k^{(1)})$, с помощью этого предиката и биекций можно определить предикат $P^{(a,b,c)}(x_i^{(a)}, x_j^{(b)}, x_k^{(c)}), a, b, c = 1, 2, 3, \dots, 8$ для любых

комбинаций сортов. Например, $P^{(1,2,4)}(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, x_k^{(4)}) = P(x_i^{(1)}, \xi_{1,2} x_j^{(2)}, \xi_{1,4} x_k^{(4)})$, в частности, $P^{(2,2,2)}(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}, x_k^{(2)}) = P(\xi_{2,1} x_i^{(1)}, \xi_{2,1} x_j^{(1)}, \xi_{2,1} x_k^{(1)})$.

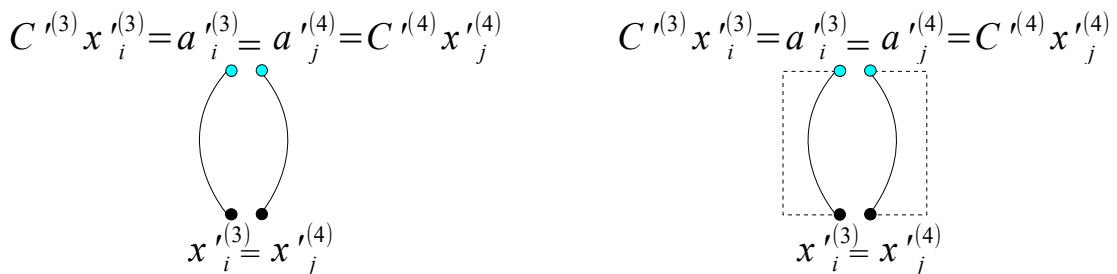
Внешние базовые склейки состоят из 2-конусов вида $a_k^{(1)} = C^{(1)}(x_k^{(1)}) \wedge a_m^{(2)} = C^{(2)}(x_m^{(2)}) \wedge x_k^{(1)} = x_m^{(2)}$. Графическое обозначение 2-конуса (пунктир указывает на наличие знака равенства в атомарной формуле $x_k^{(1)} = x_m^{(2)}$, иногда удобно пунктир заменить на знак равенства или указать явно формулы из конъюнкции склейки, но рядом с черными и белыми кружками всегда подразумеваются переменные, а не, возможно, выписанные рядом формулы, сказанное относится к графическим представлениям формул свёрток и другим формулам здесь и в дальнейшем) имеет вид



Необходимые внешние свёртки состоят из конусов вида

$$a_i'^{(3)} = C'^{(3)}(x_i'^{(3)}) \wedge a_j'^{(4)} = C'^{(4)}(x_j'^{(4)}) \wedge x_i'^{(3)} = x_j'^{(4)} \wedge a_i'^{(3)} = a_j'^{(4)}, i, j = 1, 2, \dots$$

или в графических обозначениях



При интерпретации в *Set* или другой категории x_i, x_j перейдут в имена стрелок, имеющих равные области и кообласти x_i, x_j , но для свёртки в случае категорий следует брать единичные стрелки с $x_i = C x_i = a_i, x_j = C x_j = a_j$, этот вариант указан на диаграмме справа.

Мы проведем рассуждения для произвольных стрелок с совпадающими в случае интерпретаций областями и кообластями.

Перейдем к формулировке процедуры проведения свёртки, отвечающей композиции стрелок категории.

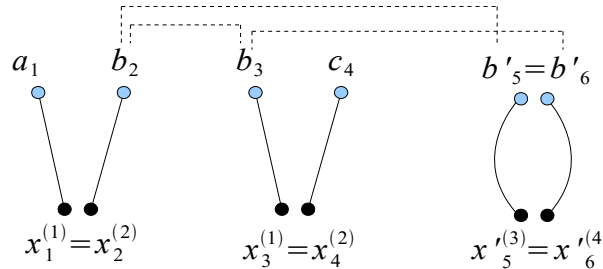
Пусть имеется склейка из двух конусов (соответствуют двум стрелкам), их произведение задаётся процедурой свёртки, задаем равенства между склейкой и свёрткой согласно приведённым ниже таблице и графическому обозначению (введены переобозначения для сокращения индексной записи,

$a_1=a_1^{(1)}, b_2=a_2^{(2)}, b_3=a_3^{(1)}, c_4=a_4^{(2)}, b_5=a_5^{(3)}, b_6=a_6^{(4)}$). При постулировании свёртки и участвующих в процедуре ее применения равенств (пунктиры в графических обозначениях) появляются подформулы $a_2^{(2)}=a_5^{(3)}, a_3^{(1)}=a_6^{(4)}$, приводящие к требованию (отражает случаи возможности применения композиции) $a_2^{(2)}=a_3^{(1)}$. Равенство $C^{(1)}x_1^{(1)}=C'^{(2)}x_2^{(2)}$ или $\check{C}_1^{(1)}x_1^{(1)}=\xi_{12}C'^{(2)}\xi_{12}x_2^{(2)}=\check{C}'^{(2)}x_2^{(1)}$ даёт $\check{C}_j^{(a)}\check{C}_k^{(a)}x_i^{(a)}=\check{C}_k^{(a)}x_i^{(a)}$, $a, j, k=1,2$, то есть получаем алгебру для $s=C_1, t=C_2$ (верхние индексы у C одинаковы)

$\cdot$	s	t
s	s	t
t	s	t

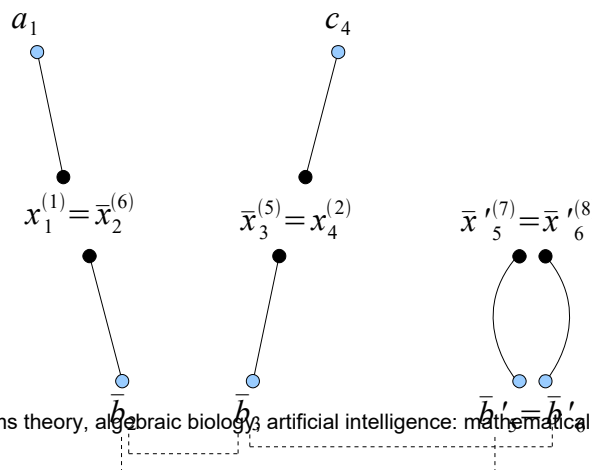
В результате имеем все необходимое для проведения процедуры свёртки, выпишем полную склейку

$a_1=C^{(1)}(x_1^{(1)})\wedge b_2=C^{(2)}(x_2^{(2)})\wedge b_3=C^{(1)}(x_3^{(1)})\wedge c_4=C^{(2)}(x_4^{(2)})$	$b'_5=C'^{(3)}(x_5^{(3)})\wedge b'_6=C'^{(4)}(x_6^{(4)})$
$\emptyset$	$\emptyset$



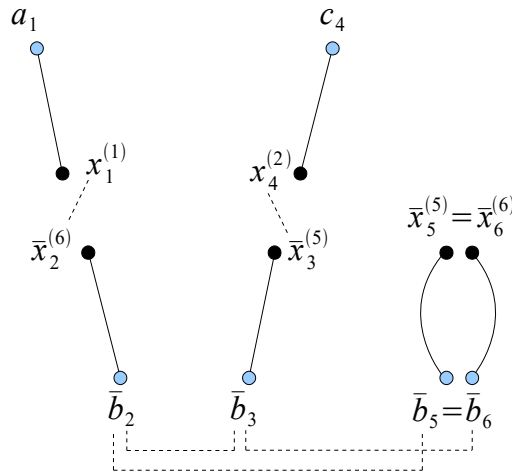
Применяем правило вывода M_b , получим

$a_1=C^{(1)}(x_1^{(1)})\wedge$	$\wedge c_4=C^{(2)}(x_4)$	$\emptyset$
$\bar{b}_2=\bar{C}^{(6)}(\bar{x}_2^{(6)})\wedge \bar{b}_3=\bar{C}^{(5)}(\bar{x}_3^{(5)})$	$\bar{b}'_5=\bar{C}'^{(7)}(\bar{x}'_5^{(7)})\wedge \bar{b}'_6=\bar{C}'^{(8)}(\bar{x}'_6^{(8)})$	



Применяем теперь правило вывода M_l , получим

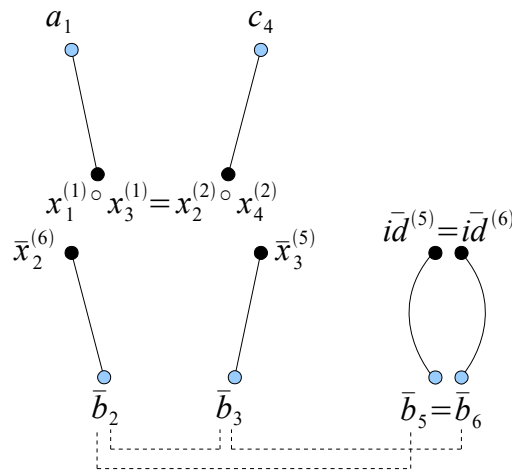
$a_1 = C^{(1)}(x_1^{(1)}) \wedge$	$\wedge c_4 = C^{(2)}(x_4)$	$\emptyset$
$\bar{b}_2 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_2^{(6)}) \wedge \bar{b}_3 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_3^{(5)})$	$\bar{b}_5 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_5^{(5)}) \wedge \bar{b}_6 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_6^{(6)})$	$\emptyset$



Остаётся применить правило вывода Ev .

При интерпретации формулы кроме выбора предиката композиции необходимо определить выбор имени функции для $\bar{x}_5^{(5)} = \bar{x}_6^{(6)}$, для случая категорий этот выбор однозначен в виде тождественной функции (единичной стрелки id для объекта, в который перейдет b_5 и b_6). Можно было бы сразу определить свёртку используя равенство $x_5 = C x_5 = b_5$, $x_6 = C x_6 = b_6$, но мы этого не сделали, чтобы подчеркнуть возможность не совпадающих с категориями моделей, в которых количество свёрток шире, чем в случае категорий. С помощью предиката, отвечающего композиции, правило вывода Ev определяется переходом от предыдущей формулы к следующей формуле, завершающей процедуру свёртки для склейки из двух конусов.

$a_1 = C^{(1)}(x_1^{(1)} \circ x_3^{(1)}) \wedge$	$\wedge c_4 = C^{(2)}(x_2^{(2)} \circ x_4^{(2)})$	$\emptyset$
$\bar{b}_2 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_2^{(6)}) \wedge \bar{b}_3 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_3^{(5)})$	$\bar{b}_5 = \bar{C}^{(5)}(id^{(5)}) \wedge \bar{b}_6 = \bar{C}^{(6)}(id^{(6)})$	$\emptyset$



Накладывая на предикаты свойства ассоциативности и наличия единиц, мы получим формальную теорию, включающую стандартную формальную теорию категорий (см. [Hatcher, 1982]), при использовании $P_{1,1}$ -проекции в качестве дополнительного шага при проведении свёрток.

Обычные категории реализуются известными процедурами интерпретации, проведение которых мы опустим, и будучи моделями формальной теории категорий, являются тем самым моделями данной формальной теории категорных склеек.

Ввиду важности вопроса представления категорий на языке категорных склеек подытожим проведённые построения в виде теоремы.

Теорема

Пусть задана произвольная категория, тогда существует формальная теория категорных склеек, для которой данная категория является моделью.

2.4. Симплициальная категория опирается на глобулярные множества, развиваются также категории на основе кубических множеств, ближайшим для симплициальной категории примером являются даблкатегории, введенные

Эресманом [Ehresmann, 1963.], применяемые в частности, в конформной квантовой теории поля [Hu, 2007], в теории поликатегорий Сабо [Garner, 2006] и в других областях [Fiore, 2007], [Grandis, 2020].

Построим категорную склейку, среди моделей которой имеются даблкатегории. Напомним, что такое даблкатегории, взяв для определённости их определение из [Fiore, 2007].

Определение

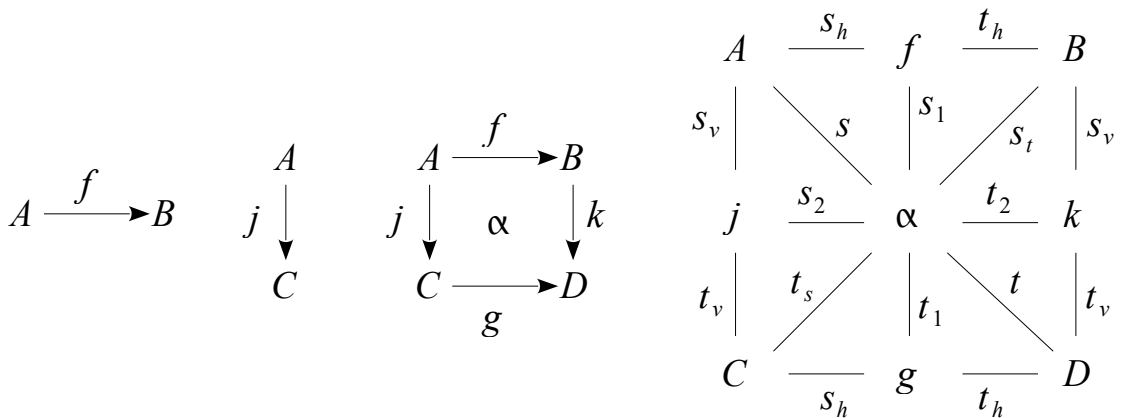
Даблкатегория $\mathbf{D}$ является по определению категорным объектом в категории малых категорий $\mathbf{Cat}$. Раскрывая это определение, имеем следующее.

Даблкатегория $\mathbf{D}$ состоит из совокупности D_0 объектов $A, B, C, \dots \in D_0$, (горизонтальной) категории D_1 с объектами D_0 и стрелками, называемыми горизонтальными морфизмами $f, g, \dots \in D_1, s_h f, t_h f \in D_0$, (вертикальной) категории D_2 с объектами D_0 и стрелками, называемыми вертикальными морфизмами $j, k, \dots \in Ar(D_2), s_v j, t_v j \in D_0$ и совокупности D квадратов или клеток $\alpha, \beta, \dots \in D$. Объекты A мы будем отождествлять с единичными стрелками $1_A^h, 1_A^v$ в категориях D_1 и D_2 . Функции источника s и цели t определяются для клеток из $\mathbf{D}$:

$$s_1 \alpha = f, t_1 \alpha = g, s_2 \alpha = j, t_2 \alpha = k.$$

Отметим для следующей диаграммы проекции категорий D_1 и D_2

$$s_h f = A, t_h f = B, f: A \rightarrow B, s_v j = A, t_v j = C, j: A \rightarrow C.$$



Композицию стрелок вертикальной категории обозначим $j_2 \circ_v j_1 = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$, а композицию стрелок горизонтальной категории обозначим $f_2 \circ_h f_1 = [f_1 f_2]$. Горизонтальное умножение клеток $[\alpha \beta]$ определено в случае

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{f} B & B \xrightarrow{f'} E & A \xrightarrow{[f f']} B \\ j \downarrow \alpha \downarrow k & k \downarrow \beta \downarrow l & j \downarrow [\alpha \beta] \downarrow l \\ C \xrightarrow{g} D & D \xrightarrow{g'} F & C \xrightarrow{[g g']} D \end{array} \quad [\cdot \cdot]$$

Вертикальное умножение клеток $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ определено в случае

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{f} B & & A \xrightarrow{f} B \\ j \downarrow \alpha \downarrow k & & \downarrow [j] \quad \downarrow [\alpha] \quad \downarrow [k] \\ C \xrightarrow{g} D & & E \xrightarrow{h} F \\ g \downarrow [\cdot] & = & \\ C \xrightarrow{g} D & & \\ j' \downarrow \beta \downarrow k' & & \\ E \xrightarrow{h} F & & \end{array}$$

Для горизонтального и вертикального умножения клеток определены единицы

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{1_A^h} A & & A \xrightarrow{f} B \\ j \downarrow i_j^h \downarrow j & & 1_A^v \downarrow i_f^v \downarrow 1_B^v \\ C \xrightarrow{1_C^h} C & & A \xrightarrow{f} B \end{array}$$

Определение единиц согласовано с умножениями клеток

$$[i_{f_1}^v i_{f_2}^v] = i_{[f_1, f_2]}^v, \left[\begin{matrix} i_{j_1}^h \\ i_{j_2}^h \end{matrix} \right] = i_{\left[\begin{matrix} j_1 \\ j_2 \end{matrix} \right]}^h .$$

Выполняется закон обмена, когда все умножения клеток определены, то

$$\left[\begin{matrix} [\alpha \beta] \\ [\gamma \delta] \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} [\alpha] [\beta] \\ [\gamma] [\delta] \end{matrix} \right]$$

На этом определение даблкатегории завершено.

На схеме с проекциями в клетке мы указали проекции необходимые нам для определения склейки s, s_t, t_s, t .

Отметим, что по заданным s и s_t (и аналогично для других подобных случаев на схеме) область для f определяется однозначно как $s\alpha = A$, поскольку $s_h f = s_h s_t \alpha = s\alpha = A$, другими словами, мы можем, не теряя общности, перейти к проекциям s, s_t, t_s, t от проекций s_h, s_v, t_h, t_v . Эти проекции действуют непосредственно на клетку, более того, уточняя данное выше определение, следует использовать именно эти проекции, а обозначения из категорий D_1 и D_2 (к которым относятся s_h, s_v, t_h, t_v) заменить их образами при вложении категорий D_1 и D_2 в даблкатегорию.

Категория D_1 вкладывается в даблкатегорию в виде поддаблкатегории, образованной горизонтальными умножениями клеток, при этом f переходит в клетку i_f^v .

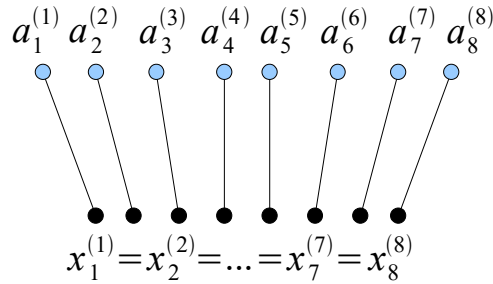
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & i_f^v & \downarrow 1_B^v \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Категория D_2 вкладывается в даблкатегорию в виде поддаблкатегории, образованной вертикальными умножениями клеток, при этом j переходит в клетку i_j^h

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A^h} & A \\ j \downarrow & i_j^h & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{1_C^h} & C \end{array}$$

Теперь мы можем определить таблицу умножения для алгебры функциональных символов проекций для склейки, учитывающую следующее: объекты $A, B, \dots$ суть единицы для обеих категорий и для 2-клеток и проекции двух категорных структур коммутируют между собой. Таким образом, определив таблицу умножения, мы можем ее сопоставить с таблицей умножения для функциональных символов искомой категорной склейки.

Внешняя склейка имеет вид



Дальнейшие несколько громоздкие выкладки полностью аналогичны проведенным для случая симплицальной категории, опуская их приходим к теореме.

Теорема

Пусть задана даблкатегория D , тогда существует категорная склейка, для которой D является моделью.

Под **алгебраической теорией** T (не в максимальной общности), понимают теорию первого порядка с равенством, сигнатурой, содержащей только функциональные буквы, которые называются n -арными операциями. При этом помимо букв для операций имеется несколько атомарных формул $s=t$ (s, t - термы), называемых аксиомами (тождествами). Многие алгебраические структуры аксиоматизируются в первопорядковых формальных теориях.

Для групп имеем обычное определение при выборе в сигнатуру одной бинарной операции умножения, одной унарной операции взятия обратного элемента и одной нульарной операции представляющей единицу. Операции удовлетворяют тождествам

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, x \cdot e = x, e \cdot x = x, x \cdot x^{-1} = e, x^{-1} \cdot x = e.$$

Однако, эквивалентным образом группу можно определить не тремя, а одной бинарной операцией деления $x:y$ с аксиомами

$$(x:y):(y:z) = x:z, x:(y:y) = x, (x:x):(y:z) = z:y.$$

А, если взять двойное деление $x * y = x^{-1} \cdot y^{-1}$, то группа определяется им и нульарной операцией единицы: $x \cdot y = (x * e) * (y * e), x^{-1} = x * e$.

Кроме бинарной операции можно построить в группе n -арные операции для любого n . При обычном задании группы базовыми операциями и

тождествами ввиду наличия различных заданий суть того, что же такое группа скрывается за частными способами ее задания.

Имеется категорная конструкция, снимающая эти вопросы, мы ее напомним в нужной нам форме и далее построим категорные склейки, охватывающие, в том числе, указанную конструкцию.

Отделяя формальный язык от интерпретации группы в *Set*, можно ставить вопрос об интерпретации формальной теории групп в других категориях, отличных от *Set*. Однако, аналога понятия элемента множества (объекта) в других категориях может не быть, поэтому обычное по [Мальцев, 1970] понимание интерпретации не проходит.

Композиция стрелок есть во всех категориях, для интерпретаций можно ограничиться категориями, имеющими произведения. Нужно только ответить на вопрос, куда перейдут при интерпретации переменные, если в алгебраических системах они переводились в элементы носителя, а при интерпретации в категориях у объектов нет элементов.

Выход имеется, так как тождества в алгебрах можно сформулировать без использования элементов, например, ассоциативность бинарной операции $\mu: X \times X \rightarrow X$ в полугруппе с носителем X можно выразить без элементов $x \in X$ следующим образом (см., например, [Маклейн, 2004], введение)

$$\mu \circ (\mu \times pr_3) = \mu \circ (pr_2 \times \mu) ,$$

pr_3, pr_2 - проекции $pr_3: X \times X' \times X'' \rightarrow X''$, $pr_2: X \times X' \times X'' \rightarrow X'$, здесь X множество и две его копии. Указанное тождество обычно изображают следующей диаграммой для произвольной категории C с произведениями (на схеме слева, X - объект категории C)

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{m \times pr_3} & X \times X \\ \downarrow m \times pr_1 & & \downarrow m \\ X \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I_1 \times I_2 \times I_3 & \xrightarrow{m_{1,2}^{(4)} \times \hat{pr}_3^{(3)}} & I^{(4)} \times I^{(3)} \\ \downarrow \hat{pr}_1^{(3)} \times m_{2,3}^{(6)} & & \downarrow m_{4,3}^{(5)} \\ I_1 \times I_6 & \xrightarrow{m_{1,6}^{(7)}} I_7 & \xrightarrow{\xi_{7,5}} I_5 \end{array}$$

Для дальнейшего удобно уточнять нумерацию сомножителей в категорном произведении. Пусть задан объект I категории C , а также ему изоморфные объекты $I_k, k \in \mathbb{N}, I_k = \xi_k I, I = \xi_k^{-1} I_k$, ξ_k - изоморфизмы, при этом

$$\begin{aligned} I^n = I \times \dots \times I &= \xi_1^{-1} I_1 \times \dots \times \xi_n^{-1} I_n = (\xi_1^{-1} \times \dots \times \xi_n^{-1}) I_1 \times \dots \times I_n = \xi_{1, \dots, n}^{-1} I_1 \times \dots \times I_n, \\ I_1 \times \dots \times I_n &= \xi_1 \times \dots \times \xi_n I^n = \xi_{1, \dots, n} I^n. \end{aligned}$$

Обозначим также $\xi_{k,l} = \xi_k \circ \xi_l : I_k \rightarrow I_l$.

Проекциям $pr_k : I^n \rightarrow I, k \leq n$ сопоставим проекции

$$\begin{aligned} \hat{pr}_k^n : I_1 \times \dots \times I_n &\rightarrow I_k, k \leq n, \\ \hat{pr}_k^n(I_1 \times \dots \times I_n) &= \hat{pr}_k^n \xi_{1,\dots,n} I^n = \xi_k I, \xi_k^{-1} \hat{pr}_k^n \xi_{1,\dots,n} I^n = I, \\ \xi_k^{-1} \hat{pr}_k^n \xi_{1,\dots,n} &= pr_k^n = pr_k \end{aligned}$$

Пусть задана бинарная операция, как стрелка $\mu : I \times I \rightarrow I$, она определяет операции

$$\mu_{ij}^k : I_i \times I_j \rightarrow I_k, \mu_{ij}^k = \xi_k \mu \xi_i^{-1} \times \xi_j^{-1} = \xi_k \mu \xi_{i,j}^{-1}$$

(аналогичным образом задаются выражения для n -арных операций $\mu : I^n \rightarrow I$ $\mu_{i,\dots,j}^k : I_i \times \dots \times I_j \rightarrow I_k, \mu_{i,\dots,j}^k = \xi_k \mu \xi_i^{-1} \times \dots \times \xi_j^{-1} = \xi_k \mu \xi_{i,\dots,j}^{-1}$).

В перечисленных обозначениях выписана правая часть схемы выше.

Определение

Последовательность (кортеж) переменных $(x_1, \dots, x_n)$ назовём **контекстом** для терма, переменные которого содержатся в данном кортеже. Сопоставим кортежу объект I^n категории C , такое сопоставление является взаимнооднозначным.

Ясно, что у терма может быть много допустимых контекстов, и что некоторые контексты недопустимы для заданного терма (например, контекст (x_1, x_2) недопустим для терма $t(x_1, x_7)$).

Ближайшая задача состоит в том, чтобы перейти от обычной интерпретации формального языка алгебраической теории в **Set** к языку полностью интерпретируемому с помощью стрелок категории C , имеющей конечные произведения: константам, переменным, базовым операциям (функциональным символам) и термам сопоставить соответствующие стрелки категории C .

Поскольку в категории с конечными произведениями имеется терминальный объект 1 , то его можно использовать для сопоставления констант стрелкам: каждой константе сопоставим по отдельному морфизму $1 \rightarrow I$.

Сопоставим переменным $x_1, \dots, x_k, \dots$ стрелки в C .

Выберем контекст $(x_1, \dots, x_n)$, ему соответствует I^n для этого объекта имеется n проекций $pr_k : I^n \rightarrow I$, которые отвечают произведению

$pr_k: I \times \dots \times I \rightarrow I$ (эти проекции возникли в категории $\mathcal{C}$ при построении данного произведения).

Сопоставим переменной x_k в контексте $(x_1, \dots, x_n), k \leq n$ стрелку $pr_k: I \times \dots \times I$ и, тем самым, стрелку $\hat{pr}_k^n(I_1 \times \dots \times I_n) = I_k$. Подчеркнем, что контексты с $n < k$ недопустимы для термина x_k .

Перейдем к сопоставлению стрелок базовым операциям языка алгебраической теории.

Сопоставим каждой k -арной операции μ морфизм (обозначенный той же буквой) $\mu: I^k \rightarrow I$. Теперь необходимо задать морфизм в контексте для определения соответствия термам базовых операций от произвольных переменных. Для термина $\mu(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ (переменные попарно различны) допустим контекст $(x_1, \dots, x_n)$ при $n \geq \max(i_1, \dots, i_k)$.

В терме k -арной операции переменных может быть меньше, чем k , в случае когда на некоторых местах стоят константы или на некоторых местах стоит одна и та же переменная. Такие термы являются примерами производных операций, полученных из базовых операций. Подобным образом из каждого термина имеющего q различных переменных можно получить операции меньшей арности, такие операции мы будем называть **простыми производными операциями**. На данном шаге индуктивного построения сопоставления термам стрелок, зададим таким термам t , содержащим m различных переменных морфизмы $t: I^m \rightarrow I$, при $m=0$ морфизмы $1 \rightarrow I$. При обычной интерпретации простые производные операции задаются автоматически вместе с морфизмами базовых операций. Например, $t(x_2, x_3) = \mu(a, x_2, x_3, x_2)$, для операции $\mu(x_1, x_2, x_3, x_4)$ арности 4 определяется как функция двух переменных из функции четырех переменных, соответствующей при интерпретации самой операции μ .

Для удобства сначала рассмотрим случай бинарной операции и термина $\mu(x_i, x_j), i \neq j$.

Сопоставим данному терму стрелку

$$\mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n(I_1 \times \dots \times I_n) = \mu_{i,j}^k(I_i \times I_j) = I_k$$

или

$$\mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n(I_1 \times \dots \times I_n) = \mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n \circ \xi_{1,\dots,n}(I^n) = \mu_{i,j}^k(I_i \times I_j) = I_k = \xi_k I,$$

или

$$\xi_k^{-1} \circ \mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n \circ \xi_{1,\dots,n}(I^n) = I.$$

Мы из $\mu: I^2 \rightarrow I$ получили морфизм $\mu_n^I: I^n \rightarrow I$ для каждого n из допустимых контекстов.

Формула морфизма $\mu_n^I: I^n \rightarrow I$ для k -арной операции $\mu: I^k \rightarrow I$ (или k -

арной производной операции) имеет следующий вид

$$\xi_l^{-1} \circ \mu_{i_1, \dots, i_k}^l \circ \hat{p}r_{i_1}^n \times \dots \times \hat{p}r_{i_k}^n \circ \xi_{1, \dots, n}(I^n) = I.$$

Перейдем к сопоставлению стрелок произвольным термам языка алгебраической теории.

Определение проводим по индукции, опираясь на уже сопоставленные на предыдущих шагах стрелкам $I^n \rightarrow I$ переменные и базовые операции, термы и простые производные операции.

Пусть в заданном терме t последней применена базовая операция из сигнатуры с именем μ , то есть терм имеет вид $t = \mu(t_1, \dots, t_k)$, причём термам $t_1, \dots, t_k$ уже сопоставлены морфизмы $t_{n,k}^I: I^n \rightarrow I$. Если при построении терма последнее применение операции μ дополнено использованием констант и размещением букв одной переменной на нескольких местах, то рассматриваем этот терм как простую производную операцию соответствующей арности меньшей k .

Для наглядности, сначала рассмотрим сопоставление стрелок терму $t = \mu(t_1, t_2), t_1 = \mu(x_2, x_3), t_2 = x_4, t = t(x_2, x_3, x_4) = \mu(\mu(x_2, x_3), x_4)$. Допустимый контекст здесь $(x_1, \dots, x_n), n \geq 4$, для термов $\mu(x_2, x_3), x_4$ и объекта I имеем морфизмы μ_n^I, pr_4^n . Действуем в нумерованном представлении $I_1 \times \dots \times I_n$ в выбранном контексте: вставляем выписанные в нумерованном представлении морфизмы с учетом номеров переменных вместо термов и применяем для последней операции терма известное для нее представление (включая случай известных для нее простых производных операций).

$$\mu(\mu(x_2, x_3), x_4) \rightarrow \mu((\mu_{2,3}^k \circ (\hat{p}r_2^n \times \hat{p}r_3^n)), \hat{p}r_4^n) \rightarrow \mu_{k,4}^q \circ ((\mu_{2,3}^k \circ (\hat{p}r_2^n \times \hat{p}r_3^n)) \times \hat{p}r_4^n)$$

Далее с помощью изоморфизмов приходим в выражению в ненумерованном представлении.

Данный шаг выглядит в общем случае $t = \mu(t_1, \dots, t_k)$ следующим образом

$$I^n \xrightarrow{(t_1^I, \dots, t_k^I)} I^k \xrightarrow{\mu^I} I$$

Построенную интерпретацию алгебраической теории в категории называют **моделью** M теории T в категории C .

Естественным образом обобщается понятие гомоморфизма алгебр на их категорные модели. Гомоморфизм моделей $h: M \rightarrow M'$ определяется как морфизм h категории C (в Set это отображения множеств), который коммутирует с базовыми k -арными операциями моделей $h \circ f = f' \circ h^k$.

$$\begin{array}{ccc} M \times \dots \times M = M^k & \xrightarrow{h \times \dots \times h = h^k} & M'^k = M' \times \dots \times M' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xrightarrow{h} & M' \end{array}$$

Сами модели образуют категорию $M(T, C)$ с гоморфизмами в качестве стрелок.

Контексты можно принять за объекты, так называемой, **синтаксической категории**, стрелками в которой являются классы эквивалентности термов, равных между собой за счёт имеющихся в теории тождеств (например, тождество ассоциативности бинарной операции $\mu x_1 \mu x_2 x_3 = \mu \mu x_1 x_2 x_3$ означает эквивалентность стоящих в равенстве термов), а композицией стрелок является подстановка

$$\vec{t} = (t_1, \dots, t_m) : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_m), \vec{s} = (s_1, \dots, s_n) : (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_n), \\ (\vec{s} \circ \vec{t})_i = s_i(t_1, \dots, t_m / x_1, \dots, x_m) .$$

Теорема

Пусть задана алгебраическая теория T и ее синтаксическая категория C_T , тогда выполняется следующее:

C_T является категорией с конечными произведениями;

категорное произведение в C_T двух объектов $(x_1, \dots, x_m)$ и $(x_1, \dots, x_n)$ задается выражением $(x_1, \dots, x_{m+n})$;

всякая модель теории T в категории с конечными произведениями может быть получена с помощью сохраняющего произведения функтора.

Обсуждаемые конструкции эквивалентных теорий, основанные на представлении композиции в виде подстановок, введены и разработаны Ловером [Lawvere, 1963] и лежат в основе ряда разделов категорной логики (см. например, [Кок, 1982]). Обсуждаемое выше представление объектов стрелками и переход к синтаксической категории позволил рассматривать алгебры со всей совокупностью операций, в обобщении данном Ловером уже становятся не определяющими сами тождества, операции и термы.

Определение

Алгебраическая теория T есть по определению категория, объектами которой являются целые неотрицательные числа $0, 1, 2, \dots$, стрелками $n \rightarrow m$ являются наборы из m отображений $n \rightarrow 1$, называемых n -арными операциями и для каждого n определены проекции

$$pr_i : n \rightarrow 1, i = 1, 2, \dots, n$$

позволяющие рассматривать объект n как n -кратное категорное произведение

$$n = 1^{\times n} = 1 \times 1 \times \dots \times 1 \text{ .}$$

Понятие модели для алгебраической теории по Ловеру вводится аналогичным приведенному выше способом.

Определение

Пусть задана алгебраическая теория T и категория E , имеющая конечные произведения. Полная подкатегория $Alg(T, E)$ категории функторов E^T с объектами в виде функторов сохраняющих произведение, называется **категорией T -моделей** или **категорией T -алгебр**. Категорию E при этом называют **категорией значений**.

T -модель, задаваемая функтором $A: T \rightarrow E$, то есть алгебра A , вполне определена, если известно $A(1)$, именно, $A(n) = A(1)^{\times n}$.

Стрелки в T также определены, например, $\mu: 2 \rightarrow 1$ переходит в

$$A(2) = A(1) \times A(1) \xrightarrow{A(\mu)} A(1) \text{ ,}$$

так что, если $E = Set$, то $A(1)$ - множество, называемое носителем алгебры, а стрелка (абстрактная бинарная операция) μ переходит в бинарную операцию на множестве $A(1)$.

Определение

Морфизмом алгебраической теории T в алгебраическую теорию T' называется всякий функтор $f: T \rightarrow T'$, сохраняющий все проекции $f(pr_i) = pr'_i$ и удовлетворяющий условию $f(n) = n$.

Например, имеется морфизм из теории колец Ли в теорию ассоциативных колец, переводящий лиевскую операцию в коммутатор в ассоциативном кольце.

Морфизм теорий $f: T \rightarrow T'$ индуцирует функтор между категориями T -моделей $\tilde{f}: Alg(T', E) \rightarrow Alg(T, E)$, который при $E = Set$ имеет левый сопряженный $F: Set \rightarrow Alg(T', Set)$. При этом если H - множество, то $F(H)$ называется свободной алгеброй на множестве H образующих. Сама теория T оказывается эквивалентной некоторой категории, двойственной полной подкатегории в $Alg(T)$, порожденной свободными алгебрами.

Обычно в определении Ловера целые числа заменяют на категорные степени объекта.

Определение

Алгебраическая теория по Ловеру - это малая категория с конечными произведениями, каждый объект которой представляется в виде степени объекта $A, A^1 = A, A^n = A \times \dots \times A$, при этом имеет место равенство

$$A^m \times A^n = A^{n+m} .$$

Синтаксическую категорию C_T можно представить в виде алгебраической теории Ловера, поскольку $(x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n) \times (x_1, \dots, x_m)$, стрелки при этом остаются теми же, что и в C_T , в том числе и переменные, но теперь они имеют смысл проекций $pr_i^n: A^n \rightarrow A$.

Рассмотрим пример алгебраической теории Ловера для теории коммутативных колец и построим для него категорную склейку.

Пример

В качестве стрелок $f: n \rightarrow m$ рассматриваются наборы по m полиномов с целыми коэффициентами от n переменных $x_1, \dots, x_n$, композицией стрелок является подстановка полиномов друг в друга. Проекция $pr_i: n \rightarrow 1$ имеют вид $pr_i(n) = x_i$.

В терминологии контекстов, например, полином $f = x_2 - 5x_3^2$ является стрелкой $f: 3 \rightarrow 1, (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{f} (x_1)$. Рассмотрим пример композиции стрелок $f = (f_1, f_2, f_3), f_1 = x_1 + x_2x_3, f_2 = x_2^2, f_3 = 1 + 2x_3^2$, $f: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$ и $g = (g_1, g_2), g_1 = x_1x_2x_3, g_2 = x_3^2 - x_1$, $g: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$. Композиция $g \circ f$ должна быть стрелкой $g \circ f: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$.

Действительно, имеем

$$(g \circ f)_1 = g_1(f_1, f_2, f_3) = (x_1 + x_2x_3)x_2^2(1 + 2x_3^2) = x_1x_2^2 + x_2^3x_3 + 2x_1x_2^2x_3^2 + 2x_2^3x_3^2, \\ (g \circ f)_2 = g_2(f_1, f_2, f_3) = (1 + 2x_3^2)^2 - x_1 - x_2x_3 = 1 - x_1 - x_2x_3 + 4x_3^2 + 4x_3^4.$$

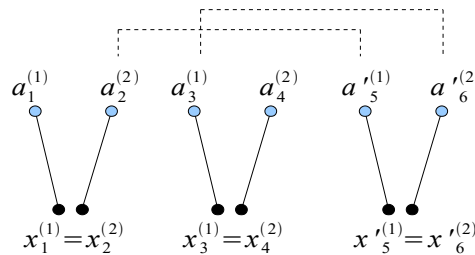
Композиция позволяет строить из полиномов меньшей степени полиномы больших степеней переменных на основе производных операций от базовых операций, также являющихся стрелками категории.

Приведённый пример называют теорией коммутативных колец.

Построим, не опуская деталей, категорную склейку для этого примера.

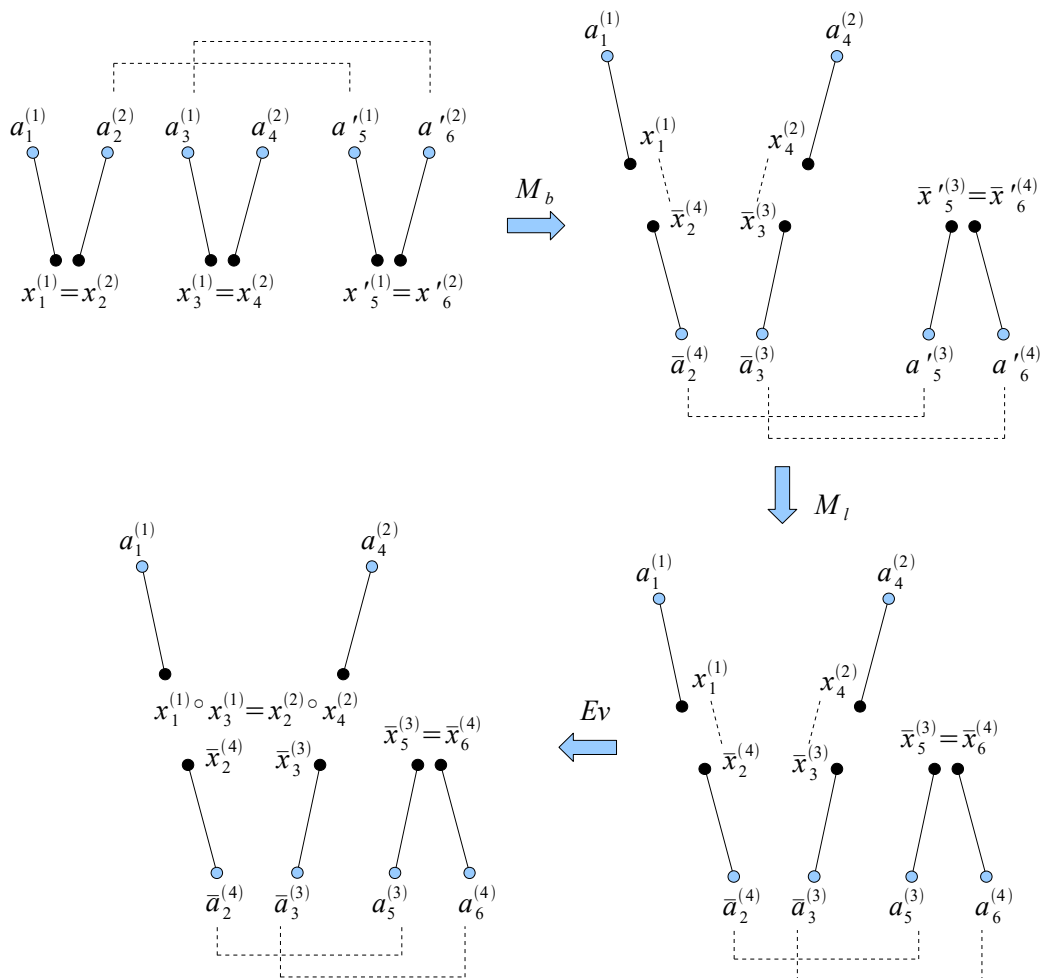
Вернемся к обозначениям склеек, проекции будем обозначать через a с индексами, имена функций - через x с индексами. Начнём с простейшего случая композиции двух стрелок $f: 1 \rightarrow 1, g: 1 \rightarrow 1$.

Внешние склейки и свёртки имеют вид



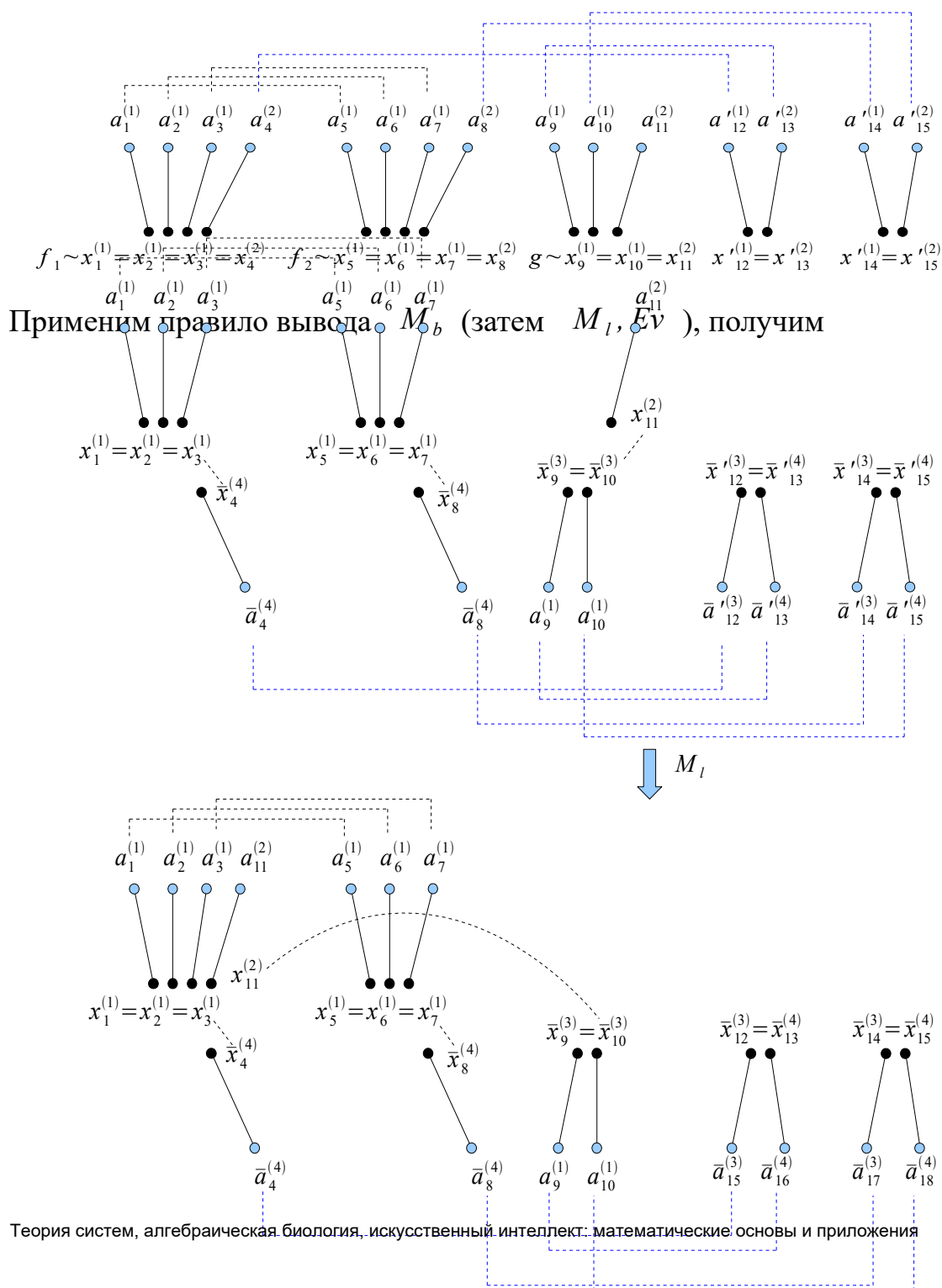
Для внешних склеек и свёрток нужны два сорта переменных в языке первый для выходов, второй для входов с проекциями $a_1^{(1)} = C^{(1)} x_1^{(1)}, a_2^{(2)} = C^{(2)} x_2^{(2)}$, проекции удовлетворяют свойствам $C^{(1)} C^{(1)} = C^{(1)}, C^{(2)} C^{(2)} = C^{(2)}$. Поскольку требуется $a_2^{(2)} = a_5^{(1)}$, то $\check{C}^{(i)} \check{C}^{(j)} = \check{C}^{(j)}, i \neq j, i, j = 1, 2$.

Выполним свёртку в приведённой диаграмме, получим

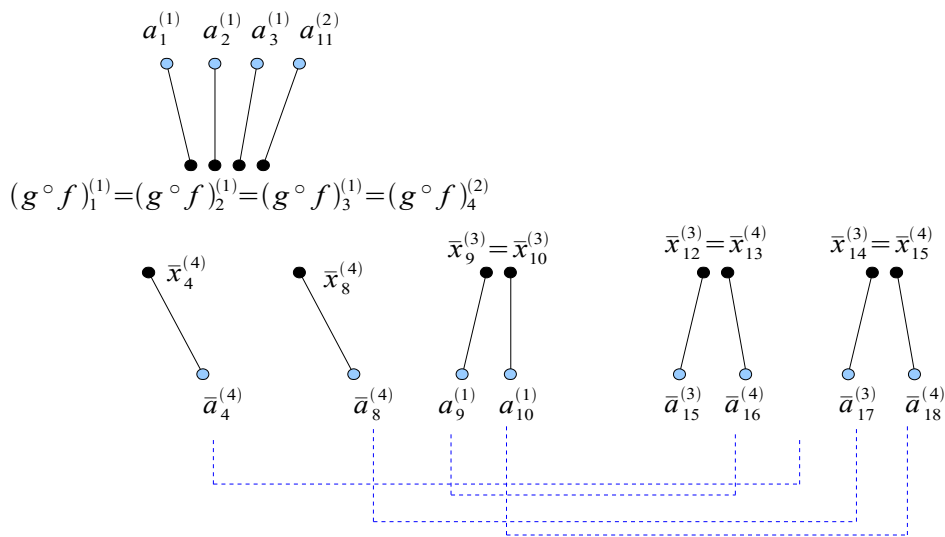


В свёртке стоит единичная стрелка с контекстом $(a_1) \rightarrow (a_1)$, $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1))$ - "сложная" функция. Приведённая свёртка практически не отличается от случая представления склейками композиции стрелок категории.

Рассмотрим еще свёртку для примера $g \circ f, f: 3 \rightarrow 2, g: 2 \rightarrow 1$, $f = (f_1, f_2), f_1 = x_1 - 2x_3, f_2 = 1 + x_2^2, g = (g_1), g_1 = x_1 x_2$.



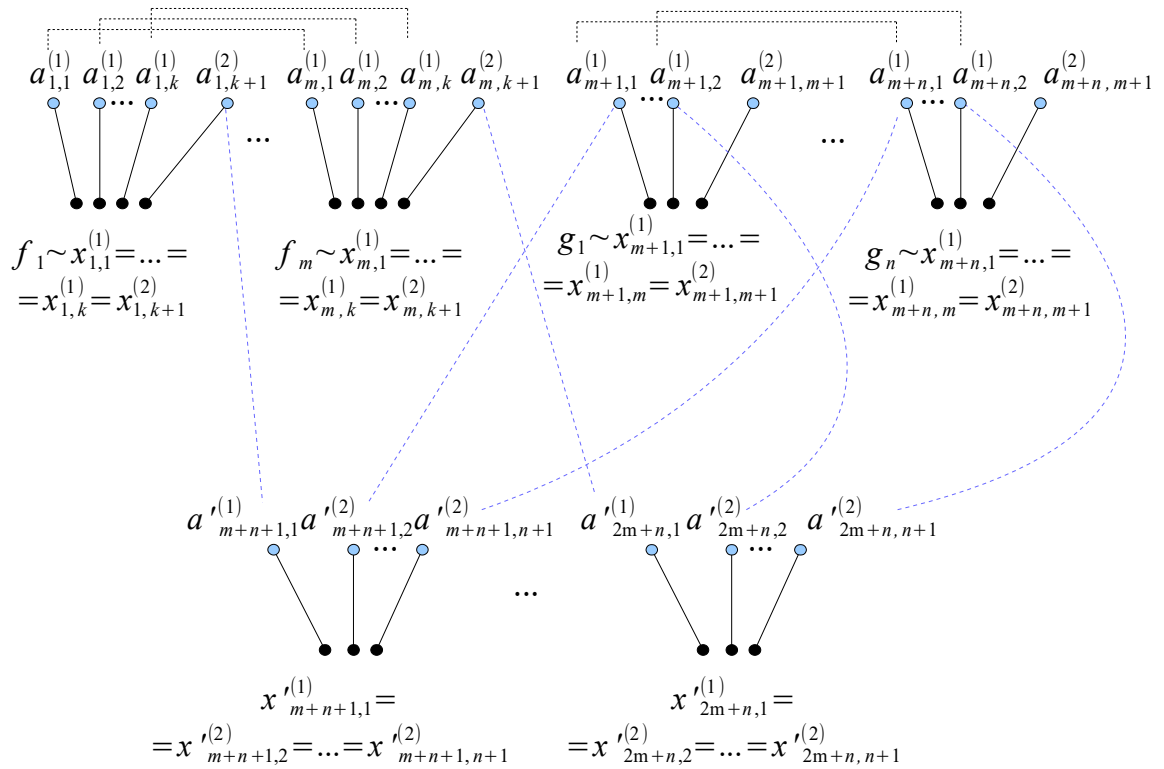
Правило вывода Ev убирает пунктиры между внешней и внутренней склейками, часть формул с копией контекста и вводит подстановку, окончательно имеем



Явное выражение для примера имеет вид $(g \circ f):(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1)$
 $(g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3)(1 + x_2^2) = x_1 - 2x_3 + x_1x_2^2 - 2x_2^2x_3$.

Примера достаточно, что построить категорную склейку для теории коммутативных колец. Мы сразу проведём построение для синтаксической категории общей алгебраической теории.

Внешняя склейка с внешней свёрткой для синтаксической категории имеет вид $(f:(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m), g:(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n))$



Выкладки, аналогичные проделанным в примере теории коммутативных колец, проходят, хотя и являются более громоздкими, в общем случае синтаксической категории произвольной алгебраической теории. В результате приходим к следующей теореме.

Теорема

Пусть задана алгебраическая теория T и её синтаксическая категория C , тогда существует категорная склейка, для которой C является моделью.

Теорема позволяет заключить, что универсальные алгебры являются моделями подходящих категорных склеек.

3. Свёрточные поликатегории и искусственные нейронные сети

3.1. В этом небольшом разделе мы приведём основанное на категорных склейках определение свёрточных поликатегорий, введённых автором в [Толоконников, 2016] и рассмотрим представление нейронных сетей произвольной топологии в виде свёрточных поликатегорий со свёртками типа короны [Толоконников, 2016], [Tolokonnikov, 2020, v. 938]. Мы также расширим модель нейрона, которая использует свёрточные поликатегории до модели нейрона на основе склеек, что даёт возможность учитывать неспайковые

коммуникации нейронов между собой и с другими клетками. В последние годы учёт неспайковых коммуникаций нейронов привлекает большой интерес [Кузнецов, 2018].

Определение

Категорная склейка называется **свёрточной поликатегорией**, если она имеет ровно два типа сортов переменных ("входы" и "выходы"), алгебру проекций вида $C_i C_j = C_j$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$ со свёртками, соединяющими выходы с входами, и являющимися конусами указанных сортов.

Свёрточные поликатегории достаточно подробно изучались в [Толоконников, 2016, 2017, 2018], мы на них здесь не останавливаемся, считая необходимые для данной статьи их свойства известными. Перейдем к определению новой склеечной модели нейронов и их сетей.

Поликатегорная модель нейрона введена автором [Толоконников, 2016], входы и выходы полистрелок, представляющих нейроны, моделируют пути распространения спайков. Однако, межклеточные коммуникации намного богаче спайковой активности. Во многих исследованиях обнаружено влияние на спайковую активность со стороны других видов связей между нейронами. Появились модели нейронов [Кузнецов, 2018], учитывающие подобные взаимодействия.

Определение

Пусть задана модель категорной склейки, имеющей два выделенных сорта переменных, которые будем называть входами (*in*) и выходами (*out*) и n сортов переменных, которые будем называть сортами каналов неспайковой коммуникации. Пусть также эта модель состоит из наборов конусов из указанных $n_{in} + n_{out} + n$ сортов переменных. Тогда **нейроном** называется каждый из указанных конусов, а сама модель категорной склейки с имеющимися свертками называется **категорной склеечной нейронной сетью**.

Поскольку склейки включают, как частные случаи свёрточные поликатегории и высшие категории, то данное определение с учетом наличия в склейках соответствующих свёрток носит весьма общий характер и имеет богатый инструментарий для моделирования связей большой сложности между нейронами, взаимодействующими не только с помощью спайков. В следующем пункте рассмотрено моделирование традиционных искусственных нейронных сетей свёрточными поликатегориями.

3.2. Один из основных имеющихся общепринятых подходов в теории нейронных сетей, именно, *PDP* (*Parallel Distributed Processing*), был в 1980-е

годы выработан группой ученых физиологов, психологов, математиков, компьютерщиков, в члены которой, входил нобелевский лауреат Френсис Крик.

Модель нейронной сети *PDP* содержит три вида элементов, **нейрон** или сома (обрабатывающий элемент, сейчас это процессор или транспьютер), **аксон** (линия передачи сигналов) и **синапс** («стык» преобразующий сигнал с аксона в подходящий сигнал для сомы).

Нейронная *PDP* сеть в простейшем варианте образует «граф» с узлами в виде нейронов со следующими свойствами:

(а) к каждому синапсу подходит только одна линия;

(б) к различным синапсам на данном нейроне подходят линии от различных нейронов;

(в) линии передачи не ветвятся, являются обычными дугами графа.

Свойство (в), взятое из [Широков, 1990] стр.274, на самом деле требует, чтобы у нейрона было несколько выходов, это **ошибочно** не только потому, что далее в тексте [Широков, 1990] нейрон выдаёт только один сигнал, но и потому, что затушевывается важнейшее свойство живых нейронных сетей, когда один выход соединяется с **несколькими** входами других нейронов. Здесь явно используется вариант свёртки, отличающийся от известного в теории категорий способа соединения стрелок с помощью композиций. В графических обозначениях из [Rumelhart, 1987] где описана *PDP* модель, пункт (в) призван заменить



Рис.2. Схематичное изображение нейронов

что не удаётся, в примере (см. рис. 3) снова появляется ветвление линий.

Соединение нейронов в сеть порождает свёртку полистрелок, для примеров из [Широков, 1990] стр.275 имеем поликатегорный вид (нейроны, с которыми связан нейрон на первой части рисунка не указаны):

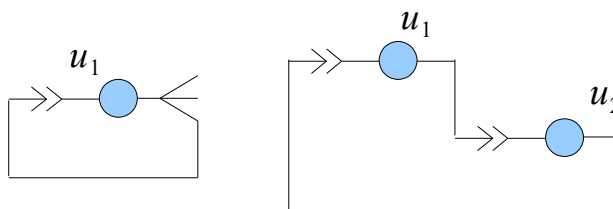


Рис.3. Схематичное изображение связей нейронов

В нашем подходе нейрону мы в данной *PDP* модели сопоставляем полистрелку с входами в виде синапсов и выходом в виде линии, которая, как и

аксон, расщепляется на несколько линий, идущих к другим нейронам (свертка типа короны).

В понятие графа входит по определению два множества, множество вершин и множество пар вершин («дуги» графа). Обычно, инженеры-нейросетевики продолжают говорить о нейросети, как о графе, но когда им вместе с определением графа (с которым они соглашаются!) из нейросети предъявляется точка ветвления, которая не входит в граф, они попадают в затруднительное положение: **нейронная сеть не является графом** в обычном, как это соответствует приведенному определению смысле. И попытка рис.3 «убрать» эту точку ветвления в нейрон не случайна.

Основной современный стандарт нейроинформатики (см., например, [Голубев, 2005]) образуют нейроны, вычисляющие значение

$$a = f(Wx + b), x = (x_1, \dots, x_k) \in \{0, 1\}^k, a \in \{0, 1\}, \\ W = (w_1, \dots, w_k)^T, w_i, b \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Нейроны в нейросети соединяются друг с другом так, что с единственного выхода нейрона (аксона) связь разветвляется на несколько входов других нейронов, в том числе, не исключен случай соединения выхода с входом одного и того же нейрона.

Таким образом, нейрон n представляется в виде функции многих переменных $n: \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$. Для нейросети соединения нейронов можно моделировать свёрткой в ассоциативной композиционной свёрточной поликатегории согласно следующей ниже теореме, доказанной в [Толоконников, 2017]. Перед формулировкой отметим, что свёртка, разветвляющая один выход на несколько входов в полистрелки свёрточного полиграфа называется **свёрткой типа корона** или просто короной.

Теорема (моделирования нейросети)

Пусть имеется искусственная нейронная сеть с нейронами $n: \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$, имеющими несколько входов ($k \in \mathbb{N}$) и один выход, со своей функцией активации u каждого нейрона, с поступающими на вход синапсов нейрона сигналами из совокупности b , являющейся множеством. Соединения нейронов осуществляются имеющимся выходом, который ветвится на конечное число $m \in \mathbb{N}$ линий, соединяющихся с входами других нейронов. Тогда нейронные сети, построенные из указанных нейронов, образуют ассоциативную композиционную свёрточную поликатегорию с набором свёрток типа "корона".

Представление нейросети в виде поликатегории помогает устранить многие неточности в теории нейросетей. Так, во второй части работы, опираясь на свойства и понятие дуальности поликатегорий, мы построим корректные схемы популярного у нейросетевиков интуитивного метода С.Осовского

[Осовский, 2017] для вычисления частных производных, используемых в методе обратного распространения ошибки.

4. Категорные системы, как категорные склейки, и системный подход

Категорная теория систем возникла как вариант формализации теории функциональных систем П.К.Анохина. В настоящем разделе мы даём определение категорных систем в их обобщении на случай категорных склеек и сравнение с рядом других строгих математических подходов в теории систем. Детальное рассмотрение самих постулатов теории функциональных систем с обсуждением категорной парадигмы, вопросов формализации интуитивных принципов изоморфизма и иерархии по П.К.Анохину, а также подробный физиологический пример категорной теории гомеостаза рассмотрены во второй части работы.

4.3. В данном пункте мы дадим определение категорных систем на основе категорных склеек и дальнейшее обсуждение их сравнения с другими подходами.

Важнейший момент, по поводу которого П.К.Анохин подверг исчерпывающей критике подходы М.Месаровича и их разновидности (что относится также к подходу к системам по С.Н.Васильеву), - это отсутствие системообразующего фактора в определении системы. **Определение системы должно отражать источник и механизм собирания системы из подсистем**, чего в подходе С.В.Васильева к системам не наблюдается. Именно поэтому под определение систем попадают алгебраические системы по А.И.Мальцеву и другие самые общие структуры математики, рассматриваемые в виде систем, определяемых по С.Н.Васильеву, как расширения аксиоматической теории множеств.

Мы определим категорные системы и категорные функциональные системы, включающие формулировку системообразующего фактора.

Пусть заданы две модели категорных склеек. Как и в случае категорий [Mac Lane, 2013] можно подчеркнуть различие аксиоматического определения от модели приставкой «мета». Другими словами, удобно называть категорные склейки в их формальном определении метасклейками, а их модели категорными склейками, что мы иногда, в частности, в данном пункте, будем делать.

Отображение одной модели или, другими словами, категорной склейки в другую называется **склеечным функтором**, если оно сохраняет склеечные структуры (свёртки, проекции и так далее). Здесь мы не будем изучать свойства функторов между категорными склейками, отметив только, что категорные

склейки со склеечными функторами образуют обычную категорию, которую мы будем называть *категорией склеек*.

Определение

Пусть задана категорная склейка, как модель формальной метасклейки. Тогда всякая склейка или набор конусов категорной склейки называется *категорной системой* или просто *системой*. Система называется *составной*, если она представима в виде свёрток других систем, называемых *подсистемами* исходной системы. Если систему нельзя представить в виде свёртки других систем, то она называется *простой системой*.

Системообразующий фактор по П.К.Анохину находит естественную модель в категорных функциональных системах.

Определение

Пусть задана совокупность категорных систем $\{S_\alpha, S_r, \alpha \in I\}$, I – индексное множество, S_r – выделенная система, называемая *результатом*, склеечный эндифунктор F в категории систем и свёртка Δ . Тогда, если свёртка применима к совокупности преобразованных систем $\{FS_\alpha, FS_r, \alpha \in I\}$, то пара (F, S_r, Δ) называется *системообразующим фактором* составной системы $S = \Delta(\{FS_\alpha\})$, имеющей систему S_r в качестве результата.

Замечание

Эндифунктор можно было бы включить в свёртку, однако, удобно указывать явно на изменения в подсистемах и отдельно на соединение подсистем в систему свёрткой. Более того, эндифунктор может включать свёртку и свёртка определения становится в этом случае тождественной. Иногда удобнее при создании системы из подсистем сначала применить свёртку, а потом подходящий эндифунктор, с чем мы сталкиваемся в теории категорных искусственных нейронных сетей.

Мы уже касались во введении возможности сведения в каком-либо смысле одной теории к другой, то есть *редукционизма*, в данном пункте, опираясь на категорную теорию систем раскроем это понятие более детально, дадим определение физической системы и ответим на вопросы Н.Василюка о возможных описаниях взаимодействия двух системных структур (физиологической и физической) на одном субстрате живого организма.

Можно ли свести химию к физике, есть ли в физической теории объяснения физиологическим законам и нельзя ли их «вывести» из физики, такие и подобные вопросы относят к проблеме редукционизма, то есть сведения

одной теории к другой. На наш взгляд физическую (химическую, биологическую и так далее) теорию следует представлять как теорию физических (химических, биологических и так далее) систем. Это согласуется с принятым в настоящее время представлением о том, что теория систем - это наука наук (см., например, [Yi-Lin Forrest, 2018]). Таким образом, ответ на вопросы о сведении одной науки к другой не может быть решен на уровне отдельных наук, он есть вопрос теории систем. Именно в теории систем мы должны определиться с тем, что такое физическая или химическая системы, заодно возникнет возможность построить морфизмы одной теории в другую и отвечать на их основе на вопросы о взаимодействии систем, в том числе, о включении одной системы в другую и несводимости одной теории к другой.

Этот вопрос находит решение в категорной теории систем.

Для определенности ограничимся сейчас языками первого порядка, ряд обобщений на основе других логик или исчислений помимо классической логики оказывается в принципе несложным.

Пусть задана формальная теория категорных склеек, простыми, элементарными (несоставными) системами мы называем склейки, опирающиеся непосредственно на функциональные и предикатные символы без использования свёрток (полная склейка простой системы имеет пустые внешние свертки и пустые внутренние склейки и свёртки). Например, для случая систем материальных точек в механике сами материальные точки отвечают простым системам в категорной системе. Здесь мы затрагиваем вопрос интерпретации формальной теории, сопоставления переменным теории некоторых объектов, в частности систем в виде материальных точек. Отметим, что даже если вопрос интерпретации переменных решен, сами простые системы интерпретации еще не определяют какая теория (система) на них далее строится (физическая, химическая и тому подобное). Простые системы по словам П.К.Анохина обладают многочисленными "степенями свободы", которые должны быть ограничены для составной системы с помощью ресурсов системообразующего фактора, определяемого как результат, которого составная система должна достигнуть. Таким образом, всевозможные варианты движения (изменений и тому подобное) простых систем образующие хаос возможных движений приводятся в порядок именно системообразующим фактором, заставляющим простые системы, оказавшиеся в составе составной системы, эволюционировать вполне упорядоченным, а не произвольным (хаотическим) способом. Системообразующим фактором для систем материальных точек в механике (классической или квантовой, в квантовой теории поля или стандартной модели рассматриваются не частицы, а поля) является **принцип наименьшего действия**. Из него выводятся уравнения движения (Гамильтона, Шредингера), которым удовлетворяет эволюция каждой из частиц, как простых систем внутри составной системы N материальных точек.

Принцип наименьшего действия имеет различные выражения для классической и квантовой механик, как мы условились, уточняем - классической и квантовой систем материальных точек, поэтому эти системы различны, хотя и имеют одни и те же простые подсистемы. Окончательное решение вопросов соотношения классической и квантовой механик проводится в рамках системного рассмотрения этих двух различных категорных систем. Соотношение квантовой и классической механик как категорных систем мы проводим в отдельной работе.

Поскольку в понятие системы входит системообразующий фактор, а в обоих упомянутых механиках для их построения достаточно принципа наименьшего действия, то физическую теорию (теорию физических систем) под названием **квантовая механика** или **классическая механика N материальных точек** в рамках теории категорных систем можно точно определить как категорную склейку с простыми системами в виде N материальных точек и системообразующим фактором в виде принципа наименьшего действия.

Обобщая этот пример физических теорий, определяем физическую теорию как теорию физических систем.

Определение

Физическая система является моделью, описывающей предметную область формальной категорной склейки с системообразующим фактором в виде принципа наименьшего действия.

Для конкретизации физической теории необходимо уточнять набор функциональных и предикатных символов склейки и выбирать объект интерпретации переменных и стрелок формальной склейки.

Химические системы выделяются как системы с другим системообразующим фактором, однако с требованием, чтобы как в квантовой химии, не нарушался принцип наименьшего действия. В таком случае химическая теория (например, по Бейдеру в его подходе «атомов в молекулах») отвечает системообразующему фактору для квантовой механики частиц и сводится к физике, что можно изложить более точно. Однако, в химии используются многочисленные приближения, например, системы углеводородов ограничиваются рассмотрением ковалентных связей изображаемых в химических формулах отрезками между именами атомов. В рамках категорной химии мы можем ставить вопрос о том какой системообразующий фактор соответствует таким системам углеводородов, поскольку уравнение Шредингера для этого приближения не выполняется и не действует системообразующий фактор в виде принципа наименьшего действия квантовой механики. Тем не менее, имеются теории систем углеводородов и

они не сводимы к квантовой механике, что можно доказывать как строго математический факт, а не вдаваться в общеполософские рассуждения редукционизма. Этких вопросов мы коснемся в разделе категорной химии во второй части работы.

Ответ на вопросы Н.Василюка о способах возможного описания взаимодействия на субстрате одного и того же организма функциональных систем и физических систем [Василюк, 2021] имеется в категорной теории систем.

Подобно тому как строятся алгебраические теории в различных категориях, а не только в *Set*, можно говорить об универсуме физических теорий и уже в этом универсуме строить теорию функциональных систем, поскольку физические законы для организмов никто не берётся отменять, но системообразующие факторы функциональных систем несут свои законы физиологии, которые таким образом, вообще говоря, не сводятся к законам физическим.

Другими словами ответ на вопросы Н.Василюка состоит в следующем. Модель организма обычно представляет собой систему материальных точек (атомов, молекул, составленных из атомов, и так далее), подчиняющихся квантовой механике. Последнюю моделируем категорной склейкой с системообразующим фактором в виде принципа наименьшего действия. Рассматриваем универсум таких квантовомеханических систем. Аналогично тому, как алгебраическую теорию мы интерпретировали в различных категориях, отличных от *Set*, интерпретируем категорную функциональную систему для организма со своими системообразующими факторами в динамике системоквантов по К.В.Судакову в универсуме физических систем. Подобная модель даёт инструментарий для описания свойств и взаимодействия функциональных и физических систем организма. Точные расчеты во многом весьма трудны, но представление о сути феномена на строго математической основе мы получили в рамках категорной теории систем.

1. Introduction

The problem of constructing physical theories is the oldest and still relevant. The need for new physical theories arose to solve the problems of quantum field theory ([Shirokov, 1975]), to describe the phenomenon of consciousness ([Penrose, 1989]), to restore the Hamiltonian formalism for nonholonomic mechanics ([Kozlov, 1983]) and so on. In view of the expansion of the variety of physical theories and, most importantly, the need to clarify the relationships and interactions between them, systems theory is in demand. Physical theories can be looked at as theories of physical systems, biological, chemical and social theories can be looked at as theories of biological, chemical and social systems. The subject of systems theory is the study of systems and the connections between them, including the study of

various physical theories, such as quantum and classical mechanics, that is, the study of classical systems and quantum systems. Typically, a physical theory consists of observables and states. Observables can be multiplied, that is, they form various kinds of algebras, the states are functionals over these algebras. Thus, the search for new physical theories begins with algebras of observables. The author, together with his scientific advisor Yu.M. Shirokov began with the search for new algebras of Hamiltonian mechanics observable in the axiomatics. The method of functional equations in the theory of algebras arose, with the help of which, in addition to the search for new algebras, the old problem of summing the Baker-Campbell-Hausdorff series, the Yang-Baxter equation for some non-semisimple Lie algebras and other problems were solved, which will be discussed in the work. The transition to the study of various systems, initiated by the task of searching for new physical theories, led to the construction of categorical systems, for which new types of categorical objects were constructed, which turned out to be necessary, namely, convolutional polycategories and categorical gluings. Based on the categorical language based on them, a formalization of Anokhin's theory of functional systems is proposed, which is also considered in the work.

2. The task of searching for formalisms of new physical theories

The work is devoted to a new branch of categorical mathematics, namely, the theory of categorical gluing and its applications in general systems theory. The language of categorical gluing uniformly describes basic algebraic structures from universal algebras to polycategories and higher categories and provides examples of new algebraic structures used, in particular, in general systems theory. Categorical gluing is introduced as formal logical theories with models in various universes, including various categories, including those different from the category of sets. Szabo's polycategories [Szabo, 1975] and the convolutional polycategories introduced by the author earlier [Tolokonnikov, 2016] are particular models of categorical gluings. In addition to new algebraic structures, the theory of categorical gluings offers a description of known categorical dualities and examples of new types of dualities, including the dualities of the categorical gluings themselves. Among the applications is the representation of traditional artificial neural networks of arbitrary topology by convolutional polycategories, the dualities in which are used, in particular, to clarify and justify the well-known Osofsky formulas for calculating gradients in the backpropagation method. A categorical model of a neuron is proposed, taking into account not only its spike activity, but also other types of intercellular communication and neural networks with a topology of higher categorical gluing, which far generalizes the types of neuron connections in traditional artificial neural networks. The formalization of the theory of functional systems by P.K. Anokhin-K.V. Sudakov, previously proposed by the author, is

axiomatized using categorical gluing and is proposed in the form of a categorical theory of systems as a general theory of systems. The categorical theory of systems includes formalized system-forming factors, principles of isomorphism and hierarchy, postulated on an intuitive level for general systems by P.K. Anokhin. Categorical systems theory, based on a strict definition of a system, provides a comprehensive and rigorous concept of a systems approach, demonstrated in the work using the example of an agricultural biomachine system.

In this work, a categorical system of hemostasis is constructed, in which many of the ambiguities and contradictions of the usual intuitive constructions of functional systems by physiologists are overcome. Numerous diagrams of functional systems, proposed in the works of physiologists of the school of P.K. Anokhin-K.V. Sudakov, have been modified to categorical diagrams. Similar work has been done for chemical formulas and the “atoms in molecules” model according to Bader; the emerging direction of categorical chemistry is used for categorical modeling of DNA and RNA molecules. Rigorous algebraic models of biomolecules are proposed as new methods for algebraic biology, which thus makes it possible to take into account the algebraic properties of biomolecules to work with the genome. The content of the work, including system studies, is a continuation of work in the direction of the problem of searching for formalisms for the algebras of observable new physical theories. Initially, this problem, initiated by a number of questions in quantum field theory, was posed for Hamiltonian mechanics by Yu.M. Shirokov, who gave the axiomatics of such mechanics. Subsequently, the same problem was posed by R. Penrose in the context of the search for formalisms of new physical theories that are more suitable than the known formalisms for describing the phenomenon of consciousness. There are other directions in the search for formalisms of physical theories, for example, Nambu mechanics [Nambu, 1983] and others.

The algebra of observable Hamiltonian theories according to the indicated axiomatics has two binary operations π , σ (analogues of associative multiplication of operators and commutator), satisfying the following identities (A, B, C are observable)

$$\begin{aligned}\sigma A \pi B C &= \pi \sigma A B C + \pi B \sigma A C \\ \sigma A \sigma B C &= \sigma \sigma A B C + \sigma B \sigma A C \\ \sigma A B + \sigma B A &= 0\end{aligned}$$

If the operation π is associative, then in addition the identity

$$\pi A \pi B C = \pi \pi A B C \quad .$$

Obviously, in the algebra of observables there must first of all be coordinates, impulses, angular momentum and other observables, which are polynomials of impulses and coordinates.

Bilinear binary operations of multiplication on polynomials for quantum mechanics can be expressed in the form of pseudodifferential operators as series of differentiation operations, so with standard quantization (in units with Planck's constant equal to 1, $i^2=-1$) we have

$$\begin{aligned}\pi A B &= \pi A(x_1, p_1) B(x_2, p_2) = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1}) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2) = \\ &= (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2)|_{1=2}, \\ \pi p x &= \omega (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) p_1 x_2 = xp + i, \quad \pi px - \pi xp = [p, x] = i.\end{aligned}$$

If we accept that the multiplication operation $\pi = \omega \pi(\partial_1, \partial_2)$, $\sigma = \omega \sigma(\partial_1, \partial_2)$ does not depend on a point in the phase space, then in the general case it is a series of differentiations, that is, the operation (we replace $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ differentiations with formal variables x, y, z , at the same time, we will consider a more general case, including an odd number of formal variables) satisfy the functional equations:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) \sigma(x + y, z) + \sigma(y, z) \sigma(y + z, x) + \sigma(z, x) \sigma(y + z, x) &= 0, \\ \sigma(x, y) + \sigma(y, x) &= 0 \\ \sigma(x, y + z) \pi(y, z) &= \pi(x + y, z) \sigma(x, y) + \pi(y, x + z) \sigma(x, z) .\end{aligned}$$

The associativity identity leads to the equation

$$\pi(x, y) \pi(x + y, z) = \pi(y, z) \pi(x, y + z)$$

The general solution of the system of the above four functional equations gives a classification of Hamiltonian associative mechanics, among which there are certainly classical and quantum mechanics. At the same time, such a classification answers a very interesting question for physicists about what kind of quantizations there are in general, whether there are Weyl, Wick, the aforementioned standard $\pi = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1})$ and other quantizations, whether there are more quantizations besides the known ones and whether it is possible to list them all. Indeed, whatever the quantization, it defines a multiplication operation that satisfies associativity and the specified functional equation.

Already in solving this equation, techniques appeared that were included in the method of functional equations in the theory of algebras, developed by the author [Tolokonnikov, 1986], [Tolokonnikov, 1988]. The general task, which includes the search for algebras of observable new physical theories (in particular, Hamiltonian ones), is as follows [Tolokonnikov, 1988].

1. 簡介

建構物理理論的問題是最古老的，但仍具有現實意義。需要新的物理理

論來解決量子場論的問題（[Shirokov, 1975]）、描述意識現象（[Penrose, 1989]）、恢復非完整力學的哈密頓形式主義（[Kozlov, 1983]）]）等等。鑑於物理理論種類的擴展，最重要的是，需要澄清它們之間的關係和相互作用，因此需要系統理論。物理理論可以被視為物理系統的理論，生物、化學和社會理論可以被視為生物、化學和社會系統的理論。系統論的學科是對系統及其之間聯繫的研究，包括對各種物理理論的研究，如量子力學和經典力學，即經典系統和量子系統的研究。通常，物理理論由可觀測值和狀態組成。可觀測量可以相乘，也就是說，它們形成各種代數，狀態是這些代數的泛函。因此，對新物理理論的探索始於可觀測量的代數。作者和他的科學顧問 Yu.M. 希羅科夫開始尋找公理學中可觀察到的哈密頓力學的新代數。代數理論中的函數方程式方法出現了，借助它，除了尋找新的代數之外，還解決了對 Baker-Campbell-Hausdorff 級數求和、某些非半簡單的 Yang-Baxter 方程的老問題李代數和其他問題都得到了解決，這些問題將在工作中討論。由尋找新物理理論的任務引發的向各種系統研究的轉變導致了分類系統的構建，為此構建了新類型的分類對象，結果證明這是必要的，即卷積多類別和絕對粘合。基於它們的分類語言，提出了 Anokhin 功能系統理論的形式化，這也在工作中得到了考慮。

2. 尋找新物理理論形式主義的任務

這項工作致力於範疇數學的一個新分支，即範疇黏合理論及其在一般系統理論中的應用。分類黏合語言統一描述了從通用代數到多範疇和更高範疇的基本代數結構，並提供了新代數結構的範例，特別是在一般系統理論中。範疇黏合是作為形式邏輯理論引入的，具有各種宇宙中的模型，包括各種類別，包括與集合類別不同的類別。Szabo 的多類別 [Szabo, 1975] 和作者先前引入的捲積多類別 [Tolokonnikov, 2016] 是分類黏合的特殊模型。除了新的代數結構之外，範疇黏合理論還提供了已知範疇對偶性的描述和新型對偶性的範例，包括範疇黏合本身的對偶性。其中的應用是透過卷積多類別來表示任意拓撲的傳統人工神經網絡，其中的對偶性特別用於澄清和證明用於計算反向傳播方法中梯度的眾所周知的奧索夫斯基公式。提出了神經元的分類模型，不僅考慮了其尖峰活動，還考慮了其他類型的細胞間通信和具有更高分類粘合拓撲的神經網絡，這遠遠概括了傳統人工神經網絡中神經元連接的類型。作者先前提出的 P.K. Anokhin-K.V. Sudakov 對功能系統理論的形式化是使用範疇粘合進行公理化的，並以系統範疇論的形式提出，作為系統的一般理論。系統範疇論包括形式化的系統形成因素、同構和層次原理，由 P.K. Anokhin 在直覺層面上對一般系統進行假設。分類系統理論是基於系統的嚴格定義，提供了系統方法的全面而嚴格的概念，並在使用農業生物機器系統的範例的工作中進行了

演示。

在這項工作中，建構了一個止血的分類系統，其中克服了生理學家通常直觀地構建功能系統的許多歧義和矛盾。 P.K. Anokhin-K.V. Sudakov 學派生理學家的著作中提出的許多功能系統圖已被修改為分類圖。 根據 Bader 的說法，化學式和「分子中的原子」模型也做了類似的工作；分類化學的新興方向用於 DNA 和 RNA 分子的分類建模。 嚴格的生物分子代數模型被提出作為代數生物學的新方法，從而使得考慮生物分子的代數特性來處理基因組成為可能。 包括系統研究在內的工作內容是尋找可觀測新物理理論代數的形式主義問題方向的工作的延續。 最初，這個問題是由量子場論中的一些問題引發的，由 Yu.M. 為哈密頓力學提出。 希羅科夫（Shirokov）給了這種力學的公理化。 隨後，R.彭羅斯在尋找新物理理論的形式主義的背景下提出了同樣的問題，這些理論比已知的形式主義更適合描述意識現象。 在尋找物理理論的形式主義方面還有其他方向，例如南部力學[Nambu, 1983]等。

根據所指示的公理學，可觀測哈密頓理論的代數有兩個二元運算 π 、 σ （運算子和交換子的結合乘法的類似物），滿足以下恆等式（A、B、C 是可觀測的）

$$\begin{aligned}\sigma A \pi B C &= \pi \sigma A B C + \pi B \sigma A C \\ \sigma A \sigma B C &= \sigma \sigma A B C + \sigma B \sigma A C \\ \sigma A B + \sigma B A &= 0\end{aligned}$$

如果運算 π 是結合律，那麼另外還有恆等式

$$\pi A \pi B C = \pi \pi A B C \quad \circ$$

顯然，在可觀測量代數中，首先必須有座標、衝量、角動量和其他可觀測量，它們是衝量和座標的多項式。

量子力學多項式乘法的雙線性二元運算可以用偽微分算子的形式表示為一系列微分運算，因此透過標準量化（以普朗克常數等於 1 的單位， $i^2=-1$ ），我們有

$$\begin{aligned}\pi A B &= \pi A(x_1, p_1) B(x_2, p_2) = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1}) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2) = \\ &= (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2)|_{1=2}, \\ \pi p x &= \omega (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) p_1 x_2 = xp + i, \pi px - \pi xp = [p, x] = i.\end{aligned}$$

如果我們接受乘法運算不依賴相空間中的點，

$\pi = \omega \pi(\partial_1, \partial_2), \sigma = \omega \sigma(\partial_1, \partial_2)$ 那麼一般情況下它是一系列微分，即運算（我
 $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ 們用形式變數 x, y, z 代替微分，在同時，我們將考慮更一般的情況，
 包括奇數個形式變數）滿足函數方程式：

$$\begin{aligned} \sigma(x, y)\sigma(x+y, z) + \sigma(y, z)\sigma(y+z, x) + \sigma(z, x)\sigma(y+z, x) &= 0, \\ \sigma(x, y) + \sigma(y, x) &= 0 \\ \sigma(x, y+z)\pi(y, z) &= \pi(x+y, z)\sigma(x, y) + \pi(y, x+z)\sigma(x, z) . \end{aligned}$$

結合性恆等式得出方程

$$\pi(x, y)\pi(x+y, z) = \pi(y, z)\pi(x, y+z) .$$

上述四個函數方程組的通解給出了哈密頓結合力學的分類，其中當然有經典力學和量子力學。同時，這樣的分類為物理學家解答了一個非常有趣的問題：一般有哪些類型的量子化，是否存在 Weyl、Wick、前面提到的標準 c
 $\pi = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1})$ 等量子化，除了已知的量子化之外是否還有更多的量子化
 是否可以全部列出。事實上，無論量化如何，它都定義了滿足結合性和指定
 函數方程式的乘法運算。

在求解此方程式時，出現了由作者 [Tolokonnikov, 1986]、[Tolokonnikov, 1988] 所發展的代數理論函數方程式方法中所包含的技術。一般任務包括尋找可觀測的新物理理論（特別是哈密頓量理論）的代數，如下所示 [Tolokonnikov, 1988]。

Литература

References

參考書目

Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд., М., Наука, 1984, 600 с.

Бодров В.А., Орлов В.Я. Психология и надежность: человек в системах управления техникой. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 1998, 288 с.

Васильев С.Н., Метод сравнения в анализе систем. I, *Дифференц. уравнения*, 1981, том 17, № 9. С. 1562–1573.

Васильев С.Н. Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектуальное управление динамическими системами, М., 2000. 352 с.

Васильев С.Н., Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю. Вывод условий сохранения свойств математических моделей, *ДАН*, 2015. том 465. № 1. С. 14–19.

Василук Н.В. О взаимодействии на одном субстрате организма функциональных и физических систем. *Биомаиусистемы*, Т.5, №2, 2021 (в печати).

Васюков В.Л. Логический плюрализм и неклассическая теория категорий,

Логические исследования. Вып. 18. М.-СПб., 2012. С.60-76.

Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производные категории, М., Наука, 1988, 416 с.

Голубев Ю.Ф. Нейронные сети в мехатронике, *Фунд. и прикл. Математика*, 2005, Т. 11, № 8, С. 81-103.

Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики, М., Наука, 1979, 412 с.

Жевлаков К.А., Слинко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным, М., Наука, 1978.

Кириллов А.А. Локальные алгебры Ли, *УМН*, Т. 31, № 4, 1976, С. 57–76.

Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А., Жиликова Л.Ю., Куливец С.Г., Чистопольский И.А. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах, *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2018, № 2, С. 3-20.

Кок А., Рейес Г.Э. Доктрины в категорной логике, с. 289-319 в кн. Справочная книга по математической логике, ч.1, М., Наука, 1982, 392 с.

Ломов Б. Ф. Человек и техника: Очерки инженерной психологии. М., Радио и связь, 1966, 464 с.

Мальцев А.И. Алгебраические системы, М., Наука, 1970, 392 с.

Мальцев А.И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями, *Матем. Сб.*, 26, №1, 1950, С.19-33.

Матросов В.М., Метод сравнения в динамике систем. I, *Дифференц. уравнения*, Т. 10, № 9, 1974, С. 1547–1559.

Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем, Новосибирск, Наука, 1980. 480 с.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., Наука, 1971, 322 с.

Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем, Москва, Мир, 1973, 344 с.

Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. М., Мир, 1978, 311с.

Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М., Горячая Линия-Телеком, 2017, 448 с.

Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики, Казань, 1884, переиздано под ред. В.И.Лобанова в 2011 году («Логические равенства», Москва, «Русская правда», 2011г., 158 с.).

Сергеев С.Ф. Введение в инженерную психологию и эргономику иммерсивных сред. СПб., Изд-во СПбГУ ИТМО, 2011, 258 с.

Сидоров А.В. Эволюция межклеточной коммуникации и структурная организация мозга, *Журнал эволюционной биохимии и физиологии*, 2012, т. 48, № 4, С. 323-328.

Толоконников Г.К. Математические основы теории биомашсистем. В кн.

Биомашсистемы. Теория и приложения, Том 1, М., Росинформагротех, 2016, С. 31-213.

Толоконников Г.К. Математическая категорная теория систем. В кн. Биомашсистемы. Теория и приложения, Том 2, М., Росинформагротех, 2016, С. 22-114.

Толоконников Г.К. Манифест: нейрографы, нейрокатегории и категорные склейки, *Биомашсистемы*, Т. 1, № 1, 2017, С. 59-146.

Толоконников Г.К. Категорные модели искусственных нейронных сетей и системной информации, категорные склейки и парадигма категорной теории систем, *Биомашсистемы*, т.2, №1, 2018, С. 127-174.

Толоконников Г.К. О классификации алгебр функций, близких к ассоциативным, с помощью метода функциональных уравнений, *Матем. заметки*, Т. 39, № 6, 1986, С. 806–818.

Толоконников Г.К. Функциональные уравнения, интеграл Фейнмана и универсальные обертывающие алгебры Ли, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 1, 79–82.

Толоконников Г.К., Широков Ю.М. Ассоциативная алгебра обобщенных функций, замкнутая относительно дифференцирования и взятия первообразной, *ТМФ*, Т. 46, № 3, 1981, С. 305–309

Черноиванов В.И. Биомашсистемы: возникновение, развитие и перспективы. *Биомашсистемы*. Т. 1, №1, 2017, С. 7-60.

Чёрч А., Введение в математическую логику, Т. 1, М., 1960.

Широков Ю.М. Аксиоматика гамильтоновых теорий общего вида, включающих классическую и квантовую как частные случаи, *ТМФ*, Т. 25, № 3 1975, С. 307–312.

Широков Ф.В. На пути к нейрокомпьютерам. Физические и математические модели нейронных сетей. М., ВИНТИ, 1990, С. 229-315.

Abramsky S., Coecke B. Categorical quantum mechanics, Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic. ELSVIER. North-Holland. 2009, P. 261-324.

Anastassiou C.A. and others, Ephaptic coupling of cortical neurons, Nature neuroscience, 2011, no.1, P. 1-8.

Baez J.C., Erbele J. Categories in control, *Theory Appl. Categ.*, v. 30, 2015, P. 836-881

Burroni A. T-cat'egories (cat'egories dans un triple). *Cahiers Topologie G'eom. Differentielle*, 12, 1971, 215–321.

Doring A., Isham C.J. A topos foundation for theories of Physics, *Journ.Math.Phys.* 49. No. 5, 2008.

Ehresmann C. Catégories structurées. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 80, 1963, P. 349–426.

- Fiore T.M. Pseudo algebras and pseudo double categories, *Journ. Homotopy and Related Struct.*, vol. 2(2), 2007, P. 119–170.
- Fong B. Decorated corelations, *Theory Appl. Categ.*, v. 33, 2018, 608-643
- Gambino F., Kock J. Double adjunctions and free monads, *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* Vol. LIII-4, 2012, P. 242-307.
- Garner R. Double clubs. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 47(4), 2006, P. 261–317.
- Garner R. Polycategories via pseudo-distributive laws, *Adv. Math.* 218, 2008, no. 3, P. 781-827.
- Grandis M., Pare R. An introduction to multiple categories *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* Vol. v.57, no 2, 2016, P. 103-159.
- Grandis M. Higher dimensional categories: from double to multiple categories, Издательство: World Scientific Publishing, 2020, 536 p.
- Graves D. Props for involutive monoids and involutive bimonoids, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 35, No. 42, 2020, P. 1564-1575.
- Hatcher W.S. The logical foundations of mathematics, Perg.Pr., 1982, 320 p.
- Hermida C. Representable multicategories. *Adv. Math.*, 151(2), 2000, P. 164–225.
- Hu P., Kriz I. Conformal field theory and elliptic cohomology, *Adv. Math.* 189, no. 2, 2004, P. 325–412.
- Kosłowski J. A monadic approach to polycategories, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 14, No. 7, 2005, P. 125-156.
- Lawvere F.V. Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1963, v. 50, P. 869-872.
- Leinster L. Higher operads, higher categories, volume 298 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- Kock J. Frobenius algebras and 2D Topological Quantum Fields Theories, Cambridge Univ. Press, 2003.
- Mac Lane S. Categorical algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1965, v.71, P. 40-106.
- Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician, Springer, Berlin, 2013.
- Rumelhart D.E., McClelland J.L. Parallel distributed processing. Explorations in the Microstructure of Cognition, vol.1, Foundations, MIT Press, 1987, XX, 547 pp.
- Shulman M. The 2-Chu-Dialectica construction and the polycategory of multivariable adjunctions, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 35, No. 4, 2020, P. 89-136.
- Soboleff S. L. Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles, *C.R. Acad. Sci. URSS*, V. 3, no. 7, 1935, P. 291–294.
- Szabo M.E. Polycategories. *Communications in Algebra*, 3(8), 1975, P. 663-689.
- Tolokonnikov G.K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol

938, 2020, Springer, P. 259-267.

Tolokonnikov G.K. The Use of Convolutional Polycategories in Problems of Artificial Intelligence. Advances in Intelligent Systems and Computing, v. 1126. Springer, 2020, P. 23-32.

Yi-Lin Forrest J. General Systems Theory. Foundation, Intuition and Applications in Business Decision Making, IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering, V. 32, Springer, 2018, 370 p.